УДК 517.956.223

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ С ВЕСОМ ФУНКЦИЙ

Г.М. Айрапетян, В.А. Бабаян

Ереванский государственный университет,
Ереван, Республика Армения, e-mail:hhayrapet@gmail.com, bvazgen@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается задача Дирихле в пространстве непрерывных с весом функций. Предполагается, что весовая функция в окрестности единицы имеет степенной неотрицательный порядок. Доказано, что однородная задача Дирихле имеет только тривиальное решение когда весовая функция имеет порядок не больше единицы, а для случая, когда порядок весовой функции больше единицы, число линейно независимых решений однородной задачи определяется по показателю порядка весовой функции. В случае целого или нецелого порядка количество линейно независимых решений различается на единицу. Получены также необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи. Решения записываются в явном виде.

Ключевые слова: задача Дирихле, весовое пространство, краевая задача, ядро Пуассона, непрерывные функции.

1. Введение. Формулировка результатов

Пусть $D^+ = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг комплексной плоскости, $T = \partial D^+ = \{z : |z| = 1\}$ – его граница и $D^- = C \setminus \overline{D^+}$. Весовая функция ρ на T определяется по формуле $\rho(t) = |1-t|^\alpha$ где α – действительное число. Пространство функций f, заданных на T , таких, что $f\rho$ непрерывна на T, обозначим $C(\rho)$. Норма в $C(\rho)$ определяется соотношением

$$\|f\|_{C(\rho)} = \max_{t\in T} |f(t)|\rho(t) .$$

В этом пространстве рассматриваем задачу Дирихле в следующей постановке:

Задача D. *Пусть $f \in C(\rho)$ – заданная функция. Требуется определить гармоническую в D^+ функцию u, удовлетворяющую условию,*

$$\lim_{r\to 1-0} \|u(rt) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0 . \tag{1}$$

Задача D в пространстве интегрируемых с весом функций $L^p(\rho)$, где $p \geqslant 1$, была исследована в работах [1], [2]. В пространстве непрерывных функций граничная задача для систем второго порядка в ограниченной области была исследована в работе [3]. При этом граничные значения рассматриваются в классической постановке (поточечная сходимость). В предлагаемой работе изучается задача D в случае, когда $\alpha \geqslant 0$. Доказывается, что при $\alpha \in (0,1)$ задача D имеет решение тогда и только тогда когда

$$F(1) = 0, \quad F(t) = f(t)|1-t|^{\alpha}\,. \tag{2}$$

При $\alpha \geqslant 1$ задача D имеет решение, если выполняется условие $f(t)(1-t)^{\alpha-1} \in L^1(T)$. Рассмотрена также соответствующая однородная задача (при $f \equiv 0$).

Для точной формулировки полученных результатов введем следующие обозначения. Через T_n обозначим множество полиномов $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ с коэффициентами a_k удовлетворяющими условиям $a_k = (-1)^n \overline{a_{n-k}}$.

Пусть $C_0(\rho) \subset C(\rho)$ пространство функций $f \in C(\rho)$, обладающих свойством $F(1) = 0$, где $F(t) = f(t)|1-t|^{\alpha}$. Через $\tilde{C}_0(\rho) \subset C_0(\rho)$ обозначим класс функций $f \in C_0(\rho)$, обладающих свойством $|f(t)||1-t|^{\alpha-1} \in L^1(T)$.

Положим

$$K(n,f,z) = \frac{1}{(1-z)^n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^n}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^+ \cup D^-\,,$$

где n – целое число и $f(t)(1-t)^n \in L^1(T)$. Тогда основные результаты работы можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

a) *Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то однородная задача D имеет только тривиальное решение.*

b) *Если $\alpha > 1$ – нецелое, то общее решение однородной задачи D можно представить в виде*

$$u(z) = \Re \frac{P(z)}{(1-z)^m}\,,$$

где $m = [\alpha]$, $P \in T_m$.

c) *Если $\alpha > 1$ – целое, то*

$$u(z) = \Re \frac{P(z)}{(1-z)^{m-1}}\,,$$

где $P \in T_{m-1}$.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Для того, чтобы задача D имела решение, необходимо и достаточно условие $f \in C_0(\rho)$.*

Теорема 3. *Пусть $\alpha \geqslant 1$ и $f \in \tilde{C}_0(\rho)$. Тогда задача D имеет решение, и его можно представить в виде*

$$u(z) = \Re(K(m,f,z) + K^*(m,f,z)) + u_0(z)\,,$$

где $u_0(z)$ – общее решение однородной задачи.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $A(D^+ \cup D^-)$ – пространство функций, аналитических в $D^+ \cup D^-$. Параллельно с задачей D рассмотрим также следующую граничную задачу в классе аналитических функций (Задача о скачке).

Задача D'. *Пусть $f \in C(\rho)$. Определить ограниченную на бесконечности функцию $\Phi(z) \in A(D^+ \cup D^-)$, для которой выполняется граничное условие*

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,, \tag{3}$$

где $\Phi^\pm(z)$ сужения функции $\Phi(z)$ на $D^\pm$ соответственно.

Следуя Мусхелишвили, для любой функции $F \in A(D^+ \cup D^-)$ положим

$$F^*(z) = -\overline{F\left(\frac{1}{\bar z}\right)}, \quad z \in D^+ \cup D^-\,. \tag{4}$$

Если f – действительнозначная функция и F решение задачи D', то ясно, что F^* также решение задачи D'.

Лемма 1. *Пусть f – действительнозначная функция и Φ решение задачи D'. Тогда*

$$u(z) = \Re(\Phi(z) + \Phi^*(z)) \tag{5}$$

– решение задачи D. Верно и обратное утверждение, т.е. если $u(z)$ решение задачи D, то существует решение задачи D' такое, что имеет место равенство (5).

☐ Пусть $\Phi \in A(D^+ \cup D^-)$ – решение задачи D'. Тогда, так как $\Phi(r^{-1}t) = -\overline{\Phi^*(rt)}$ и f – действительнозначная функция, то функция Φ^* – также решение задачи D'. Поэтому из (1) имеем:

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{C(\rho)} = \lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) + \overline{(\Phi^*)^+(rt)} - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,,$$

$$\lim_{r\to 1-0} \|(\Phi^*)^+(rt) - (\Phi^*)^-(r^{-1}t) - f(t)\|_{C(\rho)} = \lim_{r\to 1-0} \|(\Phi^*)^+(rt) + \overline{\Phi^+(rt)} - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,.$$

Следовательно

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Re(\Phi^+(rt) + (\Phi^*)^+(rt)) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0,$$

что и означает, что $u(z) = \Re(\Phi(z) + \Phi^*(z))$ при $z \in D^+$ является решением задачи D.

Пусть теперь u – решение задачи D и $u(z) = 2\Re\Phi^+(z)$, где Φ^+ – аналитическая в D^+ функция. Обозначим

$$\Phi^-(z) = -\overline{\Phi^+\left(\frac{1}{\bar z}\right)}, \quad z \in D^-\,. \tag{6}$$

Тогда функция

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & z \in D^+ \\ \Phi^-(z), & z \in D^- \end{cases}.$$

принадлежит $A(D^+ \cup D^-)$ и удовлетворяет соотношению $\Phi^* = \Phi$.

Функцию u можно представить в виде:

$$u(z) = 2\Re\Phi^+(z) = \Re(\Phi^+(z) + (\Phi^*)^+(z))\,. \tag{7}$$

Подставляя это представление в (1) имеем

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) + (\Phi^*)^+(rt) + \overline{\Phi^+(rt)} + \overline{(\Phi^*)^+(rt)} - 2f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,.$$

Учитывая, что $\Phi^+(rt) + (\Phi^*)^+(rt) = \overline{\Phi^+(rt)} + \overline{(\Phi^*)^+(rt)}$, получим

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) + \overline{\Phi^+(rt)} - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,. \tag{8}$$

Из (6) следует, что $\overline{\Phi^+(rt)} = -\Phi^-\left(r^{-1}t\right)$, поэтому равенство (8) запишется в виде:

$$\lim_{r\to 1-0} \|\Phi^+(rt) - \Phi^-\left(r^{-1}t\right) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0,$$

что и означает, что функция Φ - решение задачи D'. ■

Пусть C_0 – класс функций из $C(T)$ обращающихся в нуль в окрестности точки $t = 1$. Очевидно, что $C_0 \subset C(\rho)$.

Лемма 2. *Пусть $f \in C(\rho)$ и $\Phi \in A(D^+ \cup D^-)$ удовлетворяет условию (3). Тогда Φ представима в виде*

$$\Phi(z) = K(m, f, z) + \frac{P(z)}{(1-z)^m}\ , \tag{9}$$

где $P(z)$ – полином порядка m, а неотрицательное число m определяется соотношением: $m = [\alpha]$ при $\alpha \notin Z$ и $m = \alpha - 1$ при $\alpha \in Z$.

□ Пусть функция Φ удовлетворяет условию (3). Обозначим

$$f_r(t) = \Phi^+(rt) - \Phi^-(r^{-1}t), \quad 0 < r < 1\,.$$

Умножая обе части последнего равенства на $(1-t)^m$, получаем классическую задачу о скачке (так как $f_r(t)$ бесконечно дифференцируема на T):

$$\Phi^+(rt)(1-t)^m - \Phi^-(r^{-1}t)(1-t)^m = f_r(t)(1-t)^m\,.$$

Так как $|\Phi^-(r^{-1}z)(1-z)^m| < C|z|^m$ в окрестности бесконечности, имеем

$$\Phi(rz)(1-z)^m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f_r(\tau)(1-\tau)^m}{\tau - z}d\tau + P_{m,r}(z)\,,$$

где $P_{m,r}(z)$ – некоторый полином порядка m . Переходя к пределу при $r \to 1-0$ получаем представление (5). ■

Лемма 3. *Пусть $f \in C_0$. Тогда функция $K(m, f, z)$ является решением задачи D', т.е.*

$$\lim_{r\to 1-0} \|K(m, f, rt) - K(m, f, r^{-1}t) - f(t)\|_{C(\rho)} = 0\,.$$

□ Пусть $f \in C_0$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ $f(t) = 0$ при $|t-1| < \delta$. Из условия леммы следует, что $K(m,f,z)$ представима в виде

$$K(m,f,z) = \frac{A_0}{(1-z)^m} + \frac{A_1}{(1-z)^{m-1}} + \ \ldots$$

в некоторой окрестности точки $z = 1$. Из этого представления имеем

$$|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t)| \leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{m-1}}{|1-rt|^{2m}}, \quad |t-1| < \delta\,,$$

где $\delta > 0$. Поэтому

$$\rho(t)|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t)| \leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^{2m}}\,.$$

При $|1-t| > 2(1-r)$ имеем

$$\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^{2m}} \leqslant \frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{(|1-t|-(1-r))^{2m}} = (1-r)^{\{\alpha\}}\frac{\tau^{1-\{\alpha\}}}{(1-\tau)^{2m}}\,,$$

где $\tau = \frac{1-r}{|1-t|}$. Из условия $|1-t| > 2(1-r)$ следует, что $\tau < \frac{1}{2}$. Поэтому, в этом случае

$$|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t)|\rho(t) \leqslant C(1-r)^{\{\alpha\}}\,.$$

При $|1-t| \leqslant 2(1-r)$ также получаем

$$\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^{2m}} \leqslant C\frac{(1-r)^{2m+\{\alpha\}}}{(1-r)^{2m}} = C(1-r)^{\{\alpha\}}\,,$$

поэтому при $|1-t| < \delta$

$$|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t) - f(t)|\rho(t) \leqslant C(1-r)^{\{\alpha\}}\,.$$

Следовательно,

$$|K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t) - f(t)| \to 0\,,$$

равномерно, при $|1-t| < \delta$.

Пусть теперь $t \in T_\delta \equiv \{t : |t| = 1, |t-1| \geqslant \delta\}$. Поскольку

$$K(m,f,rt) - K(m,f,r^{-1}t) = \left(\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_\delta}\frac{f(\tau)(1-\tau)^m}{\tau - rt}d\tau +$$

$$+\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_\delta}\frac{f(\tau)(1-\tau)^m(1-r^2)}{|\tau - rt|^2}|d\tau| = I_1(r,t) + I_2(r,t)$$

и

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right| < C_1(\delta)(1-r)\,,$$

то при $t \in T_\delta$

$$\lim_{r\to 1-0} |I_1(r,t)|\rho(t) = 0\,.$$

Далее, из свойств ядра Пуассона [3], имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_\delta} \frac{f(\tau)(1-\tau)^m(1-r^2)}{|\tau - rt|^2}|d\tau| \to f(t)(1-t)^m$$

равномерно, и поэтому

$$I_2(r,t) = \frac{1}{(1-rt)^m}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{T_\delta} \frac{f(\tau)(1-\tau)^m(1-r^2)}{|\tau - rt|^2}|d\tau| \to f(t)$$

равномерно. ■

Положим

$$\|f\|_1 = \int\limits_T |f(t)||1-t|^{\alpha-1}|dt| < \infty\,. \tag{10}$$

Лемма 4. *Пусть $f \in \tilde{C}_0(\rho)$ и $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Существует $f_\varepsilon \in C_0$ такое, что*

$$\|f_\varepsilon - f\|_{C(\rho)} < \varepsilon, \quad \|f_\varepsilon - f\|_1 < \varepsilon\,.$$

□ Обозначим ω функцию из класса C_0^∞ такую, что $\omega(x) = 1$ при $|x| < 1$ и $\omega(x) = 0$ при $|x| > 2$ и рассмотрим функцию $\omega_\varepsilon(x) = \omega\left(\frac{x-1}{\varepsilon}\right)$. В качестве f_ε возьмем функцию $f_\varepsilon = f(1-\omega_\varepsilon)$. Для нормы в весовом пространстве $C(\rho)$ получим

$$\|f_\varepsilon - f\|_{C(\rho)} = \max_{t\in T}|f_\varepsilon - f||1-t|^\alpha = \max_{t\in T}|f\omega_\varepsilon||1-t|^\alpha = \max_{|t-1|<2\varepsilon}|f||1-t|^\alpha \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0\,.$$

Стремление к нулю следует из принадлежности функции f классу $C_0(\rho)$ (класс функций $f \in C(\rho)$, обладающих свойством $F(1) = 0$, где $F(t) = f(t)|1-t|^\alpha$).

Для нормы, определяющейся по формуле (10), получим

$$\|f_\varepsilon - f\|_1 = \int\limits_T |f_\varepsilon - f||1-t|^{\alpha-1}|dt| = \int\limits_T |f\omega_\varepsilon||1-t|^{\alpha-1}|dt| \leqslant \int\limits_{|t-1|<2\varepsilon} |f||1-t|^{\alpha-1}|dt| \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$$

по теореме об абсолютной непрерывности интеграла Лебега (см. [5], стр.345). ■

Лемма 5. *Пусть $t, \tau \in T$ и $r \in (0,1)$. Тогда*

$$\sup_{r\in(0,1)} \frac{|1-t|^{1+\{\alpha\}}(1-r)|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{|1-rt|^2|\tau - rt|} < \infty\,.$$

□ Пусть α – целое число. Тогда $\{\alpha\}=0$. Так как $|1-\tau|<|1-rt|+|\tau-rt|$, то

$$\frac{|1-t|(1-r)|1-\tau|}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\leqslant\frac{|1-t|(1-r)}{|1-rt||\tau-rt|}+\frac{|1-t|(1-r)}{|1-rt|^2}\leqslant 2+2=4\,.$$

Пусть $\{\alpha\}>0$. Учитывая, что

$$\frac{|1-t|^{1+\{\alpha\}}(1-r)}{|1-rt|^{1+\{\alpha\}}|\tau-rt|}<2^{1+\{\alpha\}}\,,$$

получаем

$$\frac{|1-t|^{1+\{\alpha\}}(1-r)|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\leqslant\frac{|1-t|^{1+\{\alpha\}}(1-r)}{|1-rt|^{1+\{\alpha\}}|\tau-rt|}+$$

$$+\frac{|1-t|^{1+\{\alpha\}}(1-r)(|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}-|1-rt|^{1-\{\alpha\}})}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{1+\{\alpha\}}+A\frac{|\tau-rt|^{1-\{\alpha\}}(1-r)|1-t|^{1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\leqslant 2^{1+\{\alpha\}}+A\cdot 2^{1+\{\alpha\}}\,. \quad \blacksquare$$

3. Доказательство основных теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $0<\alpha\leqslant 1$. По лемме 2 общее решение однородной задачи D' имеет вид $\Phi(z)=A$, где A – комплексное постоянное число. Учитывая формулу (5), получаем, что решение u однородной задачи D, тождественно равно нулю.

Рассмотрим случай, когда $\alpha>1$ и α нецелое. Тогда по лемме 2 решение однородной задачи D' представляется в виде

$$\Phi(z)=A_0+\frac{A_1}{1-z}+\ldots+\frac{A_m}{(1-z)^m}\,.$$

Так как

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right|\leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{m-1}}{|1-rt|^{2m}}\,,$$

получим

$$L_r\equiv\left|\frac{1}{(1-rt)^m}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right|\rho(t)\leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^{2m}}\,. \qquad (11)$$

Пусть $|1-t|\leqslant 2(1-r)$. Тогда из (11) имеем

$$L_r\leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^{2m}}\leqslant C\frac{(1-r)^{2m+\{\alpha\}}}{|1-r|^{2m}}=C(1-r)^{\{\alpha\}}\,. \qquad (12)$$

Если же $|1-t|>2(1-r)$, то $0<\tau\equiv\frac{1-r}{|1-t|}<\frac{1}{2}$, и

$$|1-rt|\geqslant|1-t|-(1-r)=|1-t|(1-\tau)\,.$$

Учитывая это неравенство, из (11) получим:

$$L_r \leqslant C\frac{(1-r)|1-t|^{2m-1+\{\alpha\}}}{|1-t|^{2m}(1-\tau)^{2m}} \leqslant C\frac{\tau^{1-\{\alpha\}}}{(1-\tau)^{2m}}(1-r)^{\{\alpha\}} \leqslant C(1-r)^{\{\alpha\}}\,. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует, что

$$L_r \equiv \left|\frac{1}{(1-rt)^m} - \frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right|\rho(t) \leqslant C(1-r)^{\{\alpha\}}\,,$$

то есть

$$\lim_{r\to 1-0}\|\Phi^+(rt)-\Phi^-(r^{-1}t)\|_{C(\rho)} = 0\,.$$

Учитывая формулу (5), получаем доказательство утверждения b) теоремы. Если α целое, то рассмотрим функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{(1-z)^m}\,.$$

Будем иметь

$$\inf\|\Psi^+(rt)-\Psi^-(r^{-1}t)\|_{C(\rho)} > 0\,,$$

поэтому эта функция не является решением однородной задачи D'. Следовательно, $\Phi(z) = \frac{P(z)}{(1-z)^{m-1}}$, где P – некоторый полином порядка $m-1$. Применяя снова формулу (5), получаем доказательство утверждения c) теоремы. ■

Доказательство теоремы 2. Необходимость условия $f \in C_0(\rho)$ непосредственно следует из (1). Пусть теперь $f \in C_0(\rho)$. Докажем, что функция $K(m,f,z)$ является решением задачи D. Так как при условии теоремы $m=0$ и функция f интегрируема, получим:

$$K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f(\tau)(1-r^2)\bar{\tau}d\tau}{|\tau-rt|^2}\,. \tag{14}$$

Предположим сначала, что $f \in C_0$. Тогда из (14), учитывая свойства интеграла Пуассона, получим

$$K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t) \to f(t) \tag{15}$$

равномерно при $t \in T, r \to 1-0$. Далее, так как $f \in C_0$, существует $\delta > 0$ такое, что $f(t) \equiv 0$ при $|t-1| < \delta$. Поэтому из (14) имеем

$$\|K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t)\| = \sup_{r\in(0,1)}|1-t|^\alpha\frac{1}{2\pi}\int\limits_{T_\delta}\frac{|f(\tau)|(1-r^2)|d\tau|}{|\tau-rt|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{C(\rho)}\sup_{r\in(0,1)}\frac{|1-t|^\alpha}{2\pi}\int\limits_T\frac{|1-\tau|^{-\alpha}(1-r^2)|d\tau|}{|\tau-rt|^2}\,. \tag{16}$$

Из результатов [2] следует, что

$$\sup_{r\in(0,1)}\frac{|1-t|^\alpha}{2\pi}\int\limits_T\frac{|1-\tau|^{-\alpha}(1-r^2)|d\tau|}{|\tau-rt|^2} \leqslant C\,.$$

Поэтому из (16) имеем

$$\|K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t)\|_{C(\rho)}\leqslant C\|f\|_{C(\rho)}\,. \tag{17}$$

Функции класса C_0 всюду плотны в $C_0(\rho)$. Поэтому, используя (15) и (17), завершаем доказательство теоремы. ■

Доказательство теоремы 3. Из определения функции $K(m,f,z)$ имеем

$$K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t)=I_1(r,t)+I_2(r,t)\,,$$

где

$$I_1(r,t)=\left(\frac{1}{(1-rt)^m}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{f(\tau)(1-\tau)^m}{\tau-rt}d\tau\,,$$

$$I_2(r,t)=\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_T\frac{f(\tau)(1-\tau)^m(1-r^2)}{|\tau-rt|^2}|d\tau|\,.$$

Так как

$$\left|\frac{1}{(1-rt)^m}-\frac{1}{(1-r^{-1}t)^m}\right|\leqslant A\frac{(1-r)|1-t|^{m-1}}{(1-rt)^{2m}}\,,$$

то

$$\|I_1(r,t)\|_{C(\rho)}\leqslant\frac{(1-r)|1-t|^{1+\{\alpha\}}}{|1-rt|^2}\int\limits_T|f(\tau)||1-\tau|^{\alpha-1}\frac{|1-\tau|^{1-\{\alpha\}}}{|\tau-rt|}|dt|\,.$$

В силу леммы 5, получаем

$$\|I_1(r,t)\|_{C(\rho)}\leqslant A\|f\|_1\,.$$

Далее, имеем

$$\|I_2(r,t)\|_{C(\rho)}\leqslant A|1-t|^{\{\alpha\}}\int\limits_T|f(\tau)||1-\tau|^{\alpha}\frac{1-r^2}{|1-\tau|^{\{\alpha\}}|\tau-rt|^2}|d\tau|\,.$$

Учитывая, что

$$\sup_{r\in(0,1)}|1-t|^{\{\alpha\}}\int\limits_T\frac{(1-r^2)|d\tau|}{|1-\tau|^{\{\alpha\}}|\tau-rt|^2}<\infty\,,$$

получаем

$$\|I_1(r,t)\|_{C(\rho)}\leqslant A\|f\|_{C(\rho)}\,.$$

Пусть теперь $f\in\tilde C_0(\rho)$ и $\varepsilon>0$. В силу леммы 4, $f_\varepsilon\in C_0$ можно подобрать так, чтобы имели место неравенства $\|f_\varepsilon-f\|_{C(\rho)}<\varepsilon,\quad \|f_\varepsilon-f\|_1<\varepsilon$. Будем иметь

$$\|K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t)-f(t)\|_{C(\rho)}\leqslant\|K(m,f_\varepsilon,rt)-K(m,f_\varepsilon,r^{-1}t)-f_\varepsilon(t)\|_{C(\rho)}+$$

$$+\|K(m,f-f_\varepsilon,rt)-K(m,f-f_\varepsilon,r^{-1}t)\|_{C(\rho)}+\|f_\varepsilon-f\|_{C(\rho)}\,.$$

Применяя лемму 4 получаем

$$\|K(m,f,rt)-K(m,f,r^{-1}t)-f(t)\|_{C(\rho)}\leqslant\|K(m,f_\varepsilon,rt)-K(m,f_\varepsilon,r^{-1}t)-f_\varepsilon(t)\|_{C(\rho)}+$$

$$+A(\|f_\varepsilon-f\|_1+\|f_\varepsilon-f\|_{C(\rho)})$$

Применяя лемму 3, получаем, что если $f\in\tilde{C}_0(\rho)$, то задача D' имеет решение. Применяя лемму 1 и формулу (5), завершаем доказательство теоремы. ■

4. Заключение

В статье рассматрена задача Дирихле в пространстве непрерывных с весом функций $C(\rho)$ в единичном круге $D^+=\{z:|z|<1\}$ в следующей постановке: Пусть $f\in C(\rho)$ – заданная функция. Требуется определить гармоническую в D^+ функцию u, удовлетворяющую условию,

$$\lim_{r\to1-0}\|u(rt)-f(t)\|_{C(\rho)}=0\,,$$

где $\rho(t)=|1-t|^\alpha$, $t\in T$, $T=\{z:|z|=1\}$, а $\|f\|_{C(\rho)}=\max\limits_{t\in T}|f(t)|\rho(t)$ – норма пространства $C(\rho)$.

Устанавливается, что при $0<\alpha\leqslant1$ однородная задача Дирихле имеет только тривиальное решение, а при $\alpha>1$ число линейно независимых решений однородной задачи равняется $[\alpha]$, если α нецелое число и $\alpha-1$, если α – целое. Получены также необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной задачи. Решения записываются в явном виде.

Литература

1. Kazarian K.S. Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals // Studia Math. – 1987. – 86. – P.97-130.

2. Айрапетян Г.М. Задача Дирихле в пространствах с весом // Известия НАН Армении. Математика. – 2001. – 36;3. – С.22-44.

3. Soldatov A.P. Generalized potentials of double layer for second order elliptic systems // Научные ведомости БелГУ. – 2009. – 13(68);17/1. – С.103- 109.

4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1989. – 624 с.

ON DIRICHLET PROBLEM IN WEIGHTED SPACE SPACE OF CONTINUOUS FUNCTIONS

H.M. Hayrapetyan, V.A. Babayan

Erevan State University,
Erevan, Armenia, e-mail: hhayrapet@gmail.com, bvazgen@gmail.com

Abstract. The Dirichlet problem in weighted space of continuous functions is considered. It is assumed that weighted function has power nonnegative order. It is proved that the homogeneous problem has only trivial solution when order of the weighted function is not more than one. The number of linearly independent solutions of homogeneous problem is defined by the power of weighted function. The number of linearly independent solution in the case of integral power is differed by one from the one in the case of not integral power. Necessary and sufficient conditions of inhomogeneous problem solvability are obtained. All solutions are found in explicit form.

Key words: Dirichlet problem, weighted space, boundary value problem, Poisson kernel, continuous functions.

УДК 517.956

ЗАДАЧИ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СОПРЯЖЁННЫЕ ИМ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С.А. Алдашев, Р.Б. Сеилханова

Институт прикладной математики и информатики при АГУ имени К.Жубанова,,
ул. Бр.Жубановых, 263, 030000, Актобе, Казахстан, e-mail:aldash51@mail.ru

Аннотация. В работе для одного класса гиперболических уравнений исследованы задачи с отходом от характеристики и сопряженные им задачи. Доказаны корректности рассмотренных задач.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, характеристика, сопряжённая задача.

В работе [1], для уравнения колебания струны изучались задачи Дарбу с отходом от характеристики, где обращено внимание на изучение этих задач для гиперболических уравнений. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены в [2]. С использованием изложенного в [3] метода, в данной работе для одного класса многомерных гиперболических уравнений исследованы задачи с отходом от характеристики, а также сопряженные им задачи.

1. Постановка задач и основные результаты. Пусть D_β – конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная конусами $\beta|x| = t$, $|x| = 1-t$ и плоскостью $t = 0$ где $|x|$ – длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β обозначим через S_β, S^1 и S соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно-сопряженные многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0\,, \tag{1}$$

$$L^*\upsilon \equiv \Delta_x\upsilon - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i\upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0\,, \tag{1*}$$

где Δ_x– оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geqslant 2$, $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В качестве многомерного анолога задачи с отходом от характеристики рассмотрим следующую

Задача 1. *Найти в области D_β решение уравнения* (1) *из класса $\bar{C}^1(\overline{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\Big|_S = \tau(x), \quad u\Big|_{S_\beta} = \sigma(x), \tag{2}$$

или

$$u_t\Big|_S = \nu(x), \quad u\Big|_{S_\beta} = \sigma(x), \tag{3}$$

а также рассмотрим сопряженную ей задачи Дирихле и Пуанкаре.

Задача 2. *Найти в области D_β решение уравнения (1^*) из класса $\bar{C}^1(\overline{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям*

$$\upsilon\Big|_S = \tau(x), \quad \upsilon\Big|_{S_\beta} = \sigma(x), \ \upsilon\Big|_{S_1} = \varphi(x)\,, \tag{4}$$

или

$$\upsilon_t\Big|_S = \nu(x), \quad \upsilon\Big|_{S_\beta} = \sigma(x), \upsilon\Big|_{S_1} = \varphi(x)\,. \tag{5}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\geqslant 0$, $0\leqslant\theta_1<2\pi$, $0\leqslant\theta_i\leq\pi$, $i=2,3,...,m-1$.

Пусть $\left\{Y^k_{n,m}(\theta)\right\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\leqslant k\leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $W^l_2(S)$, $l=0,1,...$ – пространства Соболева, а $\tilde{S}_\beta=\{(r,\theta)\in S,\ 0<r<\frac{1}{1+\beta}\}$.

Имеет место ([4])

Лемма. *Пусть $f(r,\theta)\in W^l_2(S)$. Если $l\geqslant m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r)Y^k_{n,m}(\theta)\,, \tag{6}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leqslant l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Через $\widetilde{a}^k_{in}(r,t)$, $a^k_{in}(r,t)$, $\widetilde{b}^k_n(r,t)$, $\widetilde{c}^k_n(r,t)$, $\widetilde{d}^k_n(r,t)$, ρ^k_n, $\bar{\tau}^k_n(r)$, $\bar{\nu}^k_n(r)$, $\bar{\sigma}^k_n(r)$, $\varphi^k_n(r)$, обозначим коэффициенты разложения ряда (6), соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_ix_i\rho/r$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i=1,...,m$, $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$, $\varphi(r,\theta)$, причем $\rho(\theta)\in C^\infty(\Gamma)$, Γ – единичная сфера в E_m.

Введем множество функций

$$B^l(S)=\Bigg\{f(r,\theta):f\in W^l_2(S)\,,\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big(||f^k_n(r)||^2_{C^2((0,1))}+ \\ +\ ||f^k_n(r)||^2_{C^1([0,1])}\Big)\ \exp 2(n^2+n(m-2))<\infty,\ l>\tfrac{3m}{2}\Bigg\}.$$

Пусть $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)\in W^l_2(D_\beta)\subset C(\bar{D}_\beta)$, $i=1,...,m$, $l\geq m+1$ и $\tau(r,\theta)=r\tau^*(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)=r\nu^*(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)=r\sigma^*(r,\theta)$, $\tau^*(r,\theta)$, $\nu^*(r,\theta)\in B^l(S)$, $\sigma^*(r,\theta)\in B^l(\tilde{S}_\beta)$, $\varphi(r,\theta)\in B^l(S\setminus\tilde{S}_\beta)$. Тогда справедливы:

Теорема 1. *Задача 1 однозначно разрешима.*

Теорема 2. *Задача 2 имеет единственное решение.*

Теорема 3. *Решение задачи 1 единственна, тогда и только, тогда, когда выполняется условие* (5).

2. Разрешимость задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). В сферических координатах уравнение (1) имеет вид

$$u_{rr} + \frac{m-1}{r}u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t)u_{x_i} + b(r,\theta,t)u_t + c(r,\theta,t)u = 0\,, \tag{7}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)\,, \quad g_1 = 1\,, \quad g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2\,, \quad j > 1\,.$$

При этом известно ([4]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \dots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y^k_{n,m}(\theta)$.

Так как искомое решение задачи (1), (2) принадлежит классу $C^1(\bar{D}_\beta) \cap C^2(D_\beta)$, то его можно искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta)\,, \tag{8}$$

где $\bar{u}^k_n(r,t)$ – функции, которые будут определены ниже.

Подставим (8) в (7), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере Γ, для $\bar{u}^k_n$ получим ([3])

$$\rho^1_0\bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0\bar{u}^1_{0tt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^1_0 + \sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\right)\bar{u}^1_{0r} + \tilde{b}^1_0\bar{u}^1_{0t} + \tilde{c}^1_0\bar{u}^1_0 +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho^k_n\bar{u}^k_{nrr} - \rho^k_n\bar{u}^k_{ntt} + \left(\frac{m-1}{r}\rho^k_n + \sum_{i=1}^{m} a^k_{in}\right)\bar{u}^k_{nr} + \tilde{b}^k_n\bar{u}^k_{nt} +\right.$$

$$\left. + \left[\tilde{c}^k_n - \lambda_n\frac{\rho^k_n}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{a}^k_{in-1} - na^k_{in})\right]\bar{u}^k_n\right\} = 0\,. \tag{9}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho^1_0\bar{u}^1_{0rr} - \rho^1_0\bar{u}^1_{0tt} + \frac{m-1}{r}\rho^1_0\bar{u}^1_{0r} = 0\,, \tag{10}$$

$$\rho^k_1\bar{u}^k_{1rr} - \rho^k_1\bar{u}^k_{1tt} + \frac{m-1}{r}\rho^k_1\bar{u}^k_{1r} - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho^k_1\bar{u}^k_1 =$$
$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a^1_{i0}\bar{u}^1_{0r} + \tilde{b}^1_0\bar{u}^1_{0t} + \tilde{c}^1_0\bar{u}^1_0\right)\,, \quad n = 1\,, \quad k = \overline{1, k_1}\,,$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \rho_n^k \bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_{n-1}} \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \tilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \right.$$

$$\left. + \left[\tilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m} (\tilde{a}_{in-2}^k - (n-1) a_{in-1}^k) \right] \bar{u}_{n-1}^k \right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3... . \tag{11}$$

Нетрудно убедиться, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, ...$ – решение системы (10)-(11), то оно является решением уравнения (9).

Далее, учитывая ортогональность сферических функций $Y_{n,m}^k(\theta)$ ([4]), из краевого условия (2), в силу (8), будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad \bar{u}_n^k(r, \beta r) = \bar{\sigma}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1... . \tag{12}$$

Таким образом, задача(1), (2) сведена к системе задач для уравнений (10)-(11). Теперь будем находить решение этих задач.

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (10)-(11) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r} \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2} \bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r, t), \tag{13}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\bar{f}_0^1(r,t) \equiv \equiv 0$. Произведя в (13) замену переменных $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} u_n^k(r,t)$ и полагая $\xi = \frac{r+t}{2}$, $\eta = \frac{r-t}{2}$, получим

$$u_{n\xi\eta}^k + \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4(\xi+\eta)^2} u_n^k = f_n^k(\xi, \eta), \tag{14}$$

$f_n^k(\xi,\eta) = (\xi+\eta)^{\frac{m-1}{2}} \bar{f}_n^k(\xi+\eta,\ \xi-\eta)$, при этом краевое условие (12) запишется в виде

$$u_n^k(\xi, \xi) = \tau_n^k(\xi), \quad u_n^k(\xi, \alpha\xi) = \sigma_n^k(\xi), \quad 0 \le \xi \le \frac{1}{2}, \tag{15}$$

$$\tau_n^k(\xi) = (2\xi)^{\frac{m-1}{2}} \bar{\tau}_n^k(2\xi), \quad \sigma_n^k(\xi) = ((1+\alpha)\xi)^{\frac{m-1}{2}} \bar{\sigma}_n^k((1+\alpha)\xi), \quad 0 < \alpha = \frac{1-\beta}{1+\beta} < 1,$$

$$k = \overline{1, k_n}, \qquad n = 0, 1... .$$

Используя общее решение уравнения (14) (см.[1,5]), нетрудно показать, что решение задачи Коши для уравнения (14) имеет вид

$$u_n^k(\xi,\eta) = \frac{1}{2} \tau_n^k(\eta) R(\eta, \eta; \xi, \eta) + \frac{1}{2} \tau_n^k(\xi) R(\xi, \xi; \xi, \eta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_\eta^\xi [\nu_n^k(\xi_1) R(\xi_1, \xi_1; \xi, \eta) -$$

$$- \tau_n^k(\xi_1) \frac{\partial}{\partial N} R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta)|_{\xi_1 = \eta_1}] d\xi_1 + \int_{\frac{1}{2}}^{\xi} \int_{\alpha\xi}^{\eta} f_n^k(\xi_1, \eta_1) R(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) d\xi_1 d\eta_1, \tag{16}$$

где $R(\xi_1,\eta_1;\xi,\eta) = P_\mu\left[\dfrac{(\xi_1-\eta_1)(\xi-\eta)+2(\xi_1\eta_1+\xi\eta)}{(\xi_1+\eta_1)(\xi+\eta)}\right]$ – функция Римана уравнения (14)([6]), а $P_\mu(z)$– функция Лежандра, $\mu = n+\frac{m-3}{2}$,

$$m\nu_n^k(\xi_1) = \frac{\partial u_n^k}{\partial N}\bigg|_{\xi_1=\eta_1} = \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial u_n^k}{\partial\eta_1} + \frac{\partial\eta_1}{\partial N^\perp}\frac{\partial u_n^k}{\partial\xi_1}\right)\bigg|_{\xi_1=\eta_1},$$

$N^\perp$ – нормаль к прямой в точке (ξ_1,η_1), направленная в сторону полуплоскости $\eta\le\xi$.

Из (16) при $\eta=\alpha\xi$, используя краевое условие (15), получим интегральное уравнение первого рода

$$g_n^k(\xi) = \int\limits_{\alpha\xi}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right]d\xi_1\,, \quad 0\le\xi\le\frac{1}{2}\,,$$

$$\sqrt{2}g_n^k(\xi) = -\tau_n^k(\alpha\xi)-\tau_n^k(\xi)+\frac{(\alpha-1)}{(\alpha+1)}\int\limits_{\alpha\xi}^{\xi}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right]d\xi_1+2\sigma_n^k(\xi)\,,$$

которое дифференцированием сводится к следующему функционально-интегральному уравнению

$$\nu_n^k(\xi)-\alpha\nu_n^k(\alpha\xi) = \psi_n^k(\xi)\,, \quad 0\le\xi\le\frac{1}{2}\,, \tag{17}$$

где

$$\psi_n^k(\xi) = \int\limits_{\alpha\xi}^{\xi}\frac{(\xi_1^2-\alpha\xi^2)}{(1+\alpha)\xi_1\xi^2}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right]\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1+h_n^k(\xi) \quad h_n^k(\xi)=\frac{dg_n^k}{d\xi}\,,$$

В [7] показано, что функциональное уравнение (17) имеет единственное решение вида

$$\nu_n^k(\xi) = \frac{\psi_n^k(\xi)+\alpha\psi_n^k(\alpha\xi)}{1-\alpha^2} = \mu_n^k(\xi)+\int\limits_{\alpha^2\xi}^{\xi}G_n(\xi,\xi_1)\nu_n^k(\xi_1)d\xi_1\,, \tag{18}$$

где

$$\mu_n^k(\xi) = \frac{h_n^k(\xi)+\alpha h_n^k(\alpha\xi)}{1-\alpha^2},\ \mu_n^k(\xi)\in C\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right),$$

$$G_n(\xi,\xi_1) = \begin{cases} \dfrac{\xi_1^2-\alpha^3\xi^2}{\alpha(1+\alpha)\xi_1\xi^2}P'_\mu\left[\dfrac{\xi_1^2+\alpha^3\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right], & \alpha^2\xi\le\xi_1\le\alpha\xi\,, \\[2ex] \dfrac{\xi_1^2-\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi_1\xi^2}P'_\mu\left[\dfrac{\xi_1^2+\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right], & \alpha\xi\le\xi_1\le\xi\,. \end{cases}$$

Так как $|P'_\mu(z)|\le C=\mathrm{const}$ ([8]), то ядро $G_n(\xi,\xi_1)$ (19) допускает оценку

$$|G_n(\xi,\xi_1)| \le \frac{C}{(1+\alpha)\xi} = M\,. \tag{20}$$

Решение интегрального уравнения (18) будем искать в виде ряда

$$\nu(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \nu_l(\xi)\,, \tag{21}$$

$$\nu_0(\xi) = \mu_n^k(\xi)\,, \quad \nu_l(\xi) = \int\limits_{\alpha^2\xi}^{\xi} G_n(\xi,\xi_1)\nu_{l-1}(\xi_1)d\xi_1\,, \quad l = 1, 2\ldots\,.$$

Из (20) получим следующие оценки

$$|\nu_0(\xi)| \le \max_{[0,\frac{1}{2}]} |\mu_n^k(\xi)| = m\,, \quad |\nu_1(\xi)| \le mM(1-\alpha)\xi\,,$$

$$|\nu_2(\xi)| \le mM^2\frac{\xi^2}{2}$$

и вообще

$$|\nu_l(\xi)| \le m\frac{(M\xi)^l}{l!}\,.$$

Тогда для ряда (21) будем иметь

$$|\nu(\xi)| \le \sum_{l=0}^{\infty} |\nu_l(\xi)| \le m\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\left(\frac{C}{1+\alpha}\right)^l = m\exp\left(\frac{C}{1+\alpha}\right)\,.$$

Таким образом, интегральное уравнение (18), а также (17), имеет единственное решение. Следовательно, сначала решив задачу (10), (12) $(n = 0)$, а затем (11), (12) $(n = 1)$ и т.д., найдем последовательно все $\bar{u}_n^k(r,t)\,,\ k = \overline{1,k_n}\,,\quad n = 0,1,\ldots$.

Итак, показано, что

$$\int\limits_{\Gamma} \rho(\theta) Lu\, d\Gamma = 0\,. \tag{22}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 – плотно в $L_2((\frac{t}{\beta},\ 1-t))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(\Gamma)$– плотна в $L_2(\Gamma)$, а $T(t) \in V_1$, V_1– плотна в $L_2((0,\frac{\beta}{1+\beta}))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in$ $\in V$, $V = V_0 \otimes \Gamma \otimes V_1$– плотна в $L_2(D_\beta)$ ([9]).

Отсюда и из (22), следует, что

$$\int\limits_{D_\beta} f(r,\theta,t) LudD_\beta = 0$$

и

$$Lu = 0,\ \forall (r,\theta,t) \in D_\beta\,.$$

Таким образом, задача (1), (2) имеет решение вида

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta)\,, \tag{23}$$

где $u_n^k(r,t)$ определяются из (16), в которой $\nu_n^k(\xi)$ находятся из (18). Следовательно, решение задачи (1),(2) построено.

Теперь рассмотрим задачу (1), (3) и ее решение также будем искать в виде (8). В этом случае условие (3) имеет вид

$$\left.\frac{\partial u_n^k}{\partial N}\right|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\xi),\ u_n^k(\xi,\,\alpha\xi) = \sigma_n^k(\xi)\,, \quad 0 \le \xi \le \frac{1}{2}\,, \tag{24}$$

$$\nu_n^k(\xi) = \sqrt{2}(2\xi)^{\frac{m-1}{2}}\bar{\nu}_n^k(2\xi)\,, \quad k=\overline{1,k_n}\,, \quad n=0,1,\dots\ .$$

Далее, из (16), при $\eta = \alpha\xi$, с учетом (24), получим функционально-интегральное уравнение вида

$$\tau_n^k(\xi) + \tau_n^k(\alpha\xi) = g_n^k(\xi) + \int\limits_{\alpha\xi}^{\xi} \tau_n^k(\xi_1)G_n(\xi,\xi_1)d\xi_1\,, \tag{25}$$

где

$$g_n^k(\xi) = 2\sigma_n^k - \sqrt{2}\int\limits_{\alpha\xi}^{\xi}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\alpha\xi^2+\xi_1^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right]d\xi_1\,, \qquad g_n^k(\xi)\in C\left(\left[0,\,\frac{1}{2}\right]\right)$$

$$G_n(\xi,\xi_1) = \frac{\alpha-1}{(1+\alpha)\xi_1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\alpha\xi^2}{(1+\alpha)\xi\xi_1}\right].$$

Так как интегральный оператор, стоящий в правой части равенства (25), вполне непрерывен, то, как показано в [7], функциональное уравнение (25) имеет единственное решение. Следовательно, функция (23) является решением задачи (1), (3), где $\bar{u}_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$ определяются из (16), при этом $\tau_n^k(\xi)$ находятся из (25).

Учитывая ограничения на заданные функции $\tau(r,\theta)$, $\nu(r,\theta)$, $\sigma(r,\theta)$, анологично [3], можно доказать, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ в виде (23) принадлежит искомому классу.

Таким образом, разрешимость задачи 1 показана.

3. Единственность решения задачи 2. Сначала рассмотрим задачу (1*), (4). Для этого построим $u(r,\theta,t)-$ решение уравнения(1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),\ u\big|_{S_\beta} = 0, \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\dots\,, \tag{26}$$

$\bar{\tau}_n^k(r)\in V$, где $V-$ множество функций $\tau(r)$ из класса $C^2(0<r<1)\cap C^1(0\le r<1)$. Очевидно, что множество V плотно всюду в $L_2((0,1))$. Функцию $u(r,\theta,t)$ будем искать в виде (8). Тогда, для $u_n^k(\xi,\eta)$ получим уравнение (14) с краевыми условиями

$$u_n^k(\xi,\,\xi) = \tau_n^k(\xi)\,, \quad u_n^k(\xi,\,\alpha\xi) = 0\,, \quad 0\le\xi\le\frac{1}{2}\,, \quad k=\overline{1,k_n}\,, \quad n=0,1,\dots\ . \tag{27}$$

Как показано в п.2, задача (14), (27) имеет единственное решение.

Таким образом, решение задачи (1), (26) в виде (23) построено, где $u_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,...$ определяются из (16), в которой $\nu_n^k(\xi)$ находятся из (18).

Из определения сопряженных операторов ([10])

$$\upsilon Lu - uL^*\upsilon = -\upsilon P(u) + uP(\upsilon) - u\upsilon Q\,,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} \cos\left(N^{\perp}, x_i\right) - u_t \cos\left(N^{\perp}, t\right),$$

$$Q = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos\left(N^{\perp}, x_i\right) + b\cos\left(N^{\perp}, t\right),$$

а $N^{\perp}-$ внутренняя нормаль к границе ∂D_β, по формуле Грина имеем

$$\int\limits_{\Omega_\beta} (\upsilon Lu - uL^*\upsilon) dD_\beta = \int\limits_{\partial D_\beta} \left[\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial N'} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial N'}\right) M + u\upsilon Q\right] ds\,, \tag{28}$$

где $\frac{\partial}{\partial N'}-$ конормаль к ∂D_β, а $M^2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \cos^2\left(N^{\perp}, x_i\right) + \cos^2\left(N^{\perp}, t\right)$. Из (28), принимая во внимание однородные граничные условия (4) и тот факт, что на характеристическом конусе S^1 конормальная производная $\frac{\partial}{\partial N'}$ совпадает с производной по касательному направлению ([10]), получим $\int\limits_S \tau(r,\theta)\upsilon(r,\theta,0)ds = 0$. Отсюда, поскольку линейная оболочка система функций $\{\bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна ([9]) в $L_2(S)$, заключаем, что
$\upsilon_t(r,\theta,0) = 0$, $\forall (r,\theta) \in S$. Следовательно, в силу единственности решения задачи Коши ([10]) : $L^*\upsilon = 0$,
$\upsilon(x,0) = \upsilon_t(x,0) = 0$, будем иметь $\upsilon(x,t) = 0$, $\forall (x,t) \in D_\beta$.

Единственность решения задачи $(1^*), (4)$ показана. Аналогичным образом доказывается единственность решения задачи $(1^*), (5)$.

4. Разрешимость задачи 2. Сначала рассмотрим задачу $(1^*), (4)$. Ее решение будем искать в виде ряда (8). Тогда, как в случае задачи (1), (2) функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут удовлетворять систему уравнений (10)-(11), где a_{in}^k, $\tilde{a}_{in}^k$, $\tilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-a_{in}^k$, $-\tilde{a}_{in}^k$, $-\tilde{b}_n^k$, а $\tilde{c}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k$, $i=1,...,m$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,...$.

Из краевого условия (4) имеем

$$\begin{gathered}\bar{\upsilon}_n^k(r,0) = \bar{\tau}_n^k(r)\,, \quad 0 \le r \le 1\,, \quad \bar{\upsilon}_n^k(r,\beta r) = \bar{\sigma}_n^k(r)\,, \quad 0 \le r \le \frac{1}{1+\beta}\,, \\ \bar{\upsilon}_n^k(r,1-r) = \bar{\varphi}_n^k(r)\,, \quad \frac{1}{1+\beta} \le r \le 1\,, \quad k=\overline{1,k_n}\,, \quad n=0,1,...\,.\end{gathered} \tag{29}$$

Далее, рассмотрим уравнение (14), к которому сводится каждое уравнение системы (10)-(11), при этом условие (29) запишется в виде

$$\upsilon_n^k(\eta,\eta) = \tau_n^k(\eta)\,, \quad 0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,, \quad \upsilon_n^k(\frac{\eta}{\alpha},\eta) = \sigma_n^k(\eta)\,, \quad 0 \le \eta \le \eta_0\,,$$

$$\upsilon_n^k(\frac{1}{2},\eta)=\varphi_n^k(\eta)\,,\quad \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2}\,,\quad \sigma_n^k(\eta)=\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta\right)^{\frac{m-1}{2}}\bar{\sigma}_n^k\left(\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta\right)\,,\tag{30}$$

$$\varphi_n^k(\eta)=\left(\frac{1}{2}+\eta\right)^{\frac{m-1}{2}}\bar{\varphi}_n^k\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\,,\quad \eta_0=\frac{1-\beta}{2(1+\beta)}>0\,,\quad k=\overline{1,k_n}\,,\quad n=0,1,\dots\,.$$

Из решения Коши (16) при $\xi=\frac{1}{\alpha}\eta$ и $\xi=\frac{1}{2}$, используя краевые условия (30), получим интегральные уравнения первого рода

$$\psi_n^k(\eta)=\int\limits_{\eta}^{\frac{1}{2}}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{\eta}{2}}{\xi_1\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\right]d\xi_1\,,\quad \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2}\,,$$

$$g_n^k(\eta)=\int\limits_{\eta}^{\frac{\eta}{\alpha}}\nu_n^k(\xi_1)P_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{\eta^2}{\alpha}}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\eta\xi_1}\right]d\xi_1\,,\quad 0\le\eta\le\eta_0\,,$$

где

$$\sqrt{2}\psi_n^k(\eta)=2\varphi_n^k(\eta)-\tau_n^k(\eta)-\tau_n^k\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{(1-2\eta)}{(1+2\eta)}\int\limits_{\eta}^{\frac{1}{2}}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{1}{2}\eta}{\xi_1\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\right]d\xi_1\,,$$

$$\sqrt{2}g_n^k(\eta)=2\sigma_n^k(\eta)-\tau_n^k(\eta)-\tau_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha}\right)+\frac{(1-\alpha)}{(1+\alpha)}\int\limits_{\eta}^{\frac{\eta}{\alpha}}\frac{\tau_n^k(\xi_1)}{\xi_1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{1}{\alpha}\eta^2}{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\xi_1\eta}\right]d\xi_1\,,$$

которые дифференцированием сводятся соответственно к следующему интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\nu_n^k(\eta)=\int\limits_{\eta}^{\frac{1}{2}}\nu_n^k(\xi_1)\frac{(1-4\xi_1^2)}{\xi_1(1+2\eta)^2}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\frac{1}{2}\eta}{\xi_1\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\right]d\xi_1-\sqrt{2}\frac{d\psi_n^k}{d\eta}\,,\quad \eta_0\le\eta\le\frac{1}{2}\,,\tag{31}$$

и функционально-интегральному уравнению

$$\nu_n^k(\eta)-\gamma\nu_n^k(\gamma\eta)=h_n^k(\eta)\,,\quad \gamma=\frac{1}{\alpha}\,,\quad 0\le\eta\le\eta_0\,,\tag{17'}$$

где

$$h_n^k(\eta)=\int\limits_{\eta}^{\gamma\eta}\nu_n^k(\xi_1)\frac{(\gamma\eta^2-\xi_1^2)}{(1+\gamma)\eta^2\xi_1}P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2+\gamma\eta^2}{(1+\gamma)\eta\xi_1}\right]d\xi_1-\sqrt{2}\,\frac{dg_n^k}{d\eta}\,.$$

Как показано в п.2, уравнение (17′) имеет единственное решение.

Следовательно, ряд (23) является решением задачи $(1^*), (4)$, где $\upsilon_n^k(r,t)$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\dots$ находятся из (16), в которой $\nu_n^k(\xi)$ определяются из уравнений (31) и (17′).

Теперь рассмотрим задачу $(1^*), (5)$ и ее решение также будем искать в виде (8). Тогда, как в случае задачи $(1^*), (4)$, функции будут удовлетворять уравнению (14), при этом условие (5) запишется в виде

$$\left.\frac{\partial \upsilon_n^k}{\partial N}\right|_{\xi=\eta} = \nu_n^k(\eta)\,, \quad 0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,, \quad \upsilon_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha}, \eta\right) = \sigma_n^k(\eta)\,, \quad 0 \le \eta \le \eta_0\,, \tag{32}$$

$$\upsilon_n^k\left(\frac{1}{2}, \eta\right) = \varphi_n^k(\eta)\,, \quad \eta_0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,, \quad k = \overline{1, k_n}\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,.$$

Далее, из (16) при $\xi = \frac{\eta}{\alpha}$ и $\xi = \frac{1}{2}$, с учетом (32), получим следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau_n^k(\eta) = \int\limits_{\eta}^{\frac{1}{2}} \tau_n^k(\xi_1)\frac{(1-2\eta)}{(1+2\eta)\xi_1} P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \frac{\eta}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\xi_1}\right] d\xi_1 - \psi_n^k(\eta)\,, \qquad \eta_0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,, \tag{33}$$

и функционально-интегральное уравнение вида

$$\tau_n^k(\eta) + \tau_n^k(\gamma\eta) = g_n^k(\eta) + \int\limits_{\eta}^{\gamma\eta} \tau_n^k(\xi_1) G_n(\xi, \xi_1) d\xi_1\,, \quad 0 \le \eta \le \eta_0\,, \tag{25$'$}$$

где

$$\psi_n^k(\eta) = 2\varphi_n^k(\eta) - \varphi_n^k\left(\frac{1}{2}\right) - \sqrt{2}\int\limits_{\eta}^{\frac{1}{2}} \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \dfrac{\eta}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\xi_1}\right] d\xi_1\,,$$

$$g_n^k(\eta) = 2\sigma_n^k(\eta) - \sqrt{2}\int\limits_{\eta}^{\gamma\eta} \nu_n^k(\xi_1) P_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \gamma\eta^2}{(1+\gamma)\eta\xi_1}\right] d\xi_1\,,$$

$$G_n(\xi, \xi_1) = \frac{\gamma - 1}{(1+\gamma)\xi_1} P'_\mu\left[\frac{\xi_1^2 + \gamma\eta^2}{(1+\gamma)\eta\xi_1}\right]\,.$$

В п.2 показано, что уравнение $(25')$ имеет единственное решение.

Таким образом, ряд (23) является решением задачи $(1^*), (5)$, где $\upsilon_n^k(r,t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ находятся из (16), в которой $\tau_n^k(\xi)$ находятся из уравнений (33) и $(25')$.

Следовательно, решение задачи 2 построено.

5. Единственность решения задачи 1. Сначала рассмотрим задачу (1), (2). Для этого построим $\upsilon(r,\theta,t)$ – решение уравнения (1^*), удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon\big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta)\,, \quad \upsilon\big|_{S_\beta \cup S^1} = 0\,, \quad k = \overline{1, k_n}\,, \quad n = 0, 1, \ldots\,, \tag{34}$$

$\bar{\tau}_n^k(r) \in V$. Функцию $\upsilon(r,\theta,t)$ будем искать в виде (8). Тогда, для $\upsilon_n^k(\xi,\eta)$ получим уравнение (14) с краевыми условиями

$$\upsilon_n^k(\eta,\eta) = \tau_n^k(\eta)\,, \quad 0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,, \quad \upsilon_n^k\left(\frac{\eta}{\alpha},\eta\right) = 0\,, \quad 0 \le \eta \le \eta_0,$$
$$\upsilon_n^k\left(\frac{1}{2},\eta\right) = 0\,, \quad \eta_0 \le \eta \le \frac{1}{2}\,. \tag{35}$$

В п.4 доказано, что задача (14), (35) однозначно разрешима.

Таким образом, решение задачи $(1^*), (34)$ в виде (23) построено.

Далее, как показывалась единственность решения задачи $(1^*), (4)$ в п.3, завершается доказательство единственности решения задачи (1), (2). Аналогичным путем устанавливается единственность решения задачи (1), (3).

При $\beta = 1$ в [12] доказана

Теорема 3. *Задача 1 имеет бесчисленное множество решений.*

Пусть, теперь, $0 < \beta \le 1$. Тогда, из теорем 1 и 3 вытекает справедливость следующего критерия: задача 1 однозначно разрешима $\Longleftrightarrow \beta < 1$.

В заключение отметим, что для многомерного волнового уравнения задачи Дарбу и Дирихле изучались в [12-14].

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Protter M.H. New boundary value problems for the wave equation and equations of mixed type // J.Rath.Mech.Anal. – 1954. – 3;4. – P.435-446.

3. Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений / С.А. Алдашев. – Алматы: Гылым, 1994. – 170 с.

4. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г. Михлин. – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

5. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа / А.В. Бицадзе. – М.: Изд. АН СССР, 1959. – 164 с.

6. Copson E.T.// J.Rath. Mech.and Anal. – 1958. – 1. – P.324-348.

7. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом / Г.С. Литвинчук. – М:Наука, 1977. – 448 с.

8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.2 / Г. Бейтмен. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

9. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

10. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.4, ч.2 / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1981. – 550 с.

11. Алдашев С.А., Нуржанов Ш.Т. // Вестник КазГУ. сер.мат., мех.,инф.,Алматы. – 1997. – 8. С.6-16.

12. Алдашев С.А. // Известия НАН РК, сер.физ. -мат.наук. – 2010. – 3. – С.3-7.

13. Алдашев С.А. // Доклады НАН РК, Алматы. – 1995. – 1. – С.35-37.

14. Алдашев С.А. // Укр. матем. журнал. – 1996. –48;5. – С.701-705.

PROBLEMS WITH DEVIATION FROM CHARACTERISTICS AND CONJUGATE PROBLEMS FOR ONE CLASS OF MANY DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATIONS

S.A. Aldashev, R.B. Seilkhanova

Institute of applied mathematics and informatics ASU K.Zhubanova,
Zhubanov br., str. 263, 030000, Aktobe, Kazakhstan, e-mail:aldash51@mail.ru

Abstract. Problems with deviation from characteristics and ones conjugate to them are investigated for the class of hyperbolic equations. The correctness of these problem are proved.

Key words: hyperbolic equations, characteristics, conjugate problem.

УДК 517.968

ОБ ОБРАТИМОСТИ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЧАСТИЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

И.В. Барышева

Липецкий государственный педагогический университет,
ул. Ленина 42, Липецк, 398020, Россия, e-mail:barysheva_iv@mail.ru

Аннотация. Исследуются условия обратимости, нётеровости и фредгольмовости линейных уравнений с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций двух переменных. Основные результаты получены с применением аппроксимаций операторов с частными интегралами посредством операторов такого типа, но с вырожденными ядрами.

Ключевые слова: операторы и уравнения с частными интегралами, нётеровость, фредгольмовость, обратимость, аппроксимации операторов.

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$(I-K)x=f, \tag{1}$$

где I — единичный оператор, $K=L+M+N$, операторы L, M, N определяются равенствами

$$\begin{gathered}(Lx)(t,s)=\int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, \quad (Mx)(t,s)=\int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,\\ (Nx)(t,s)=\int_a^b\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,\end{gathered} \tag{2}$$

$t,\tau\in[a,b]$; $s,\sigma\in[c,d]$, $l(t,s,\tau)$; $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ и $f(t,s)$ – заданные измеримые по совокупности переменных функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Уравнение (1) (оператор K) обычно называют уравнением (оператором) с частными интегралами, так как в нём содержатся интегралы, в которых неизвестная функция x интегрируется по части переменных. Разрешимость, свойства решений уравнения (1) и свойства оператора K зависят от пространств, в которых они рассматриваются, и отличаются от свойств обычных интегральных уравнений и операторов. В частности, оператор K не является компактным даже в общем случае непрерывных ядер l, m, n. Более того, при $[a,b]=[c,d]=[0,1]$, единичном ядре l и нулевых функциях m и n K – не интегральный, а $I-K$ – не нётеров операторы, тогда как $(Bx)(t)=\int\limits_0^1 x(\tau)\,d\tau$ – компактный интегральный оператор с ядром l.

Частные случаи уравнения (1) появляются при решении различных задач механики сплошных сред, теории упругости, дифференциальных уравнений с частными производными и других задач [1-6].

Линейным операторам и уравнениям с частными интегралами и их приложениям посвящены монографии [4-9]; в этих же книгах приведена и библиография работ по данному направлению.

Решение уравнения (1) может обладать различными свойствами по каждой из своих переменных. Некоторые линейные задачи теории нестационарных внутренних волн приводятся к интегральным уравнениям с частными интегралами с дважды дифференцируемыми по одной из переменных решениями [10], а задача Коши для линейных интегро-дифференциальных уравнений Барбашина, моделирующих различные прикладные задачи, связана с нахождением решений частных случаев уравнения (1).

В настоящей работе исследуются условия нётеровости, фредгольмовости и обратимости операторов и уравнений с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций двух переменных.

Пусть $C(D)$ – пространство непрерывных на $D=[a,b]\times[c,d]$ функций. Через $U=C\big(C^{(p)}(t)\big)$ обозначим пространство функций $x(t,s)$, непрерывных на D вместе с частными производными по переменной t от первого до p-го порядка включительно. U – банахово пространство относительно нормы

$$\|x\|_U=\sup_{s,t}\sum_{k=0}^{p}\left|\frac{\partial^k x(t,s)}{\partial t^k}\right|=\sup_s\sup_t\sum_{k=0}^{p}\left|\frac{\partial^k x(t,s)}{\partial t^k}\right|.$$

Очевидно неравенство $\|x\|_{C(D)}\le\|x\|_U\ \ (x\in U)$, которое показывает, что пространство U непрерывно вложено в $C(D)$.

В силу теоремы Стоуна-Вейерштрасса [11, с. 20] множество многочленов $P(t,s)$ всюду плотно в U. В работе [12] показано, что в пространстве U действуют и непрерывны операторы (2) и K, если ядра $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны по совокупности переменных вместе со своими частными производными по переменной t от первого до p-го порядка.

Через C_1, C_2, C_3 обозначим множества непрерывных вместе с частными производными по переменной t до p-го порядка включительно функций $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ соответственно. Эти пространства могут рассматриваться как пространства вектор-функций $C_{[a,b]}(U)$, $C_{[c,d]}(U)$, $C_D(U)$ с нормами $\|l\|_{C_1}=\sup_\tau\|l(\cdot,\cdot,\tau)\|_U$, $\|m\|_{C_2}=\sup_\sigma\|m(\cdot,\cdot,\sigma)\|_U$, $\|n\|_{C_3}=\sup_{\tau,\sigma}\|n(\cdot,\cdot,\tau,\sigma)\|_U$, относительно которых они являются банаховыми пространствами. В множествах C_1, C_2, C_3 всюду плотны множества многочленов, заданных на $D\times[a,b]$, $D\times[c,d]$, $D\times D$ соответственно.

2. Аппроксимации операторов с частными интегралами. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{L}(U)$ ограниченных на U линейных операторов аппроксимацию оператора K

оператором $\widetilde{K}$ вида

$$\int_a^b \tilde{l}(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+$$
$$+\int_c^d \tilde{m}(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+\int_a^b\int_c^d \tilde{n}(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau.$$

Теорема 1. *Если заданные функции $l,m,n,\tilde{l},\tilde{m},\tilde{n}$ непрерывны по совокупности переменных вместе со своими частными производными по переменной t от первого до p-го порядка, причём*

$$\sum_{k=0}^{p}\int_a^b\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(l-\tilde{l})(t,s,\tau)\right|d\tau<\varepsilon_1\,,$$

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{k}\int_c^d C_k^i\left|\frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}}(m-\tilde{m})(t,s,\sigma)\right|d\sigma<\varepsilon_2\,,$$

$$\sum_{k=0}^{p}\int_a^b\int_c^d\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(n-\tilde{n})(t,s,\tau,\sigma)\right|d\sigma d\tau<\varepsilon_0\,,$$

где C_k^i – число сочетаний из k элементов по i, то $\|K-\widetilde{K}\|<\varepsilon$, где $\varepsilon=\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

□ Операторы K и $\widetilde{K}$ действуют в пространстве U [12]. Непрерывность заданных функций и их производных по t до порядка p включительно обеспечивает возможность дифференцирования под знаком интеграла. Тогда

$$\|Kx-\widetilde{K}x\|_U=\sup_{t,s}\sum_{k=0}^{p}\left[\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int_a^b(l-\tilde{l})(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau+\right.\right.$$
$$+\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int_c^d(m-\tilde{m})(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+$$
$$\left.\left.+\frac{\partial^k}{\partial t^k}\int_a^b\int_c^d(n-\tilde{n})(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\right|\right]\leq$$
$$\leq\sup_{t,s}\sum_{i=0}^{p}\left[\int_a^b\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(l-\tilde{l})(t,s,\tau)\right||x(\tau,s)|d\tau+\right.$$
$$+\int_c^d\sum_{i=0}^{k}C_k^i\left|\frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}}(m-\tilde{m})(t,s,\sigma)\right|\left|\frac{\partial^i x(t,\sigma)}{\partial t^i}\right|d\sigma+$$
$$\left.+\int_a^b\int_c^d\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(n-\tilde{n})(t,s,\tau,\sigma)\right||x(\tau,\sigma)|d\sigma d\tau\right]\leq$$

$$\leq \|x\| \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \left[\int_a^b \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} (l - \tilde{l})(t,s,\tau) \right| d\tau + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{k} C_k^i \int_c^d \left| \frac{\partial^{k-i}}{\partial t^{k-i}} (m - \tilde{m})(t,s,\sigma) \right| d\sigma +$$

$$\left. + \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} (n - \tilde{n})(t,s,\tau.\sigma) \right| d\sigma d\tau \right] \leq \|x\| \cdot \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\|K - \widetilde{K}\| < \varepsilon$. ■

В качестве $\tilde{l}, \tilde{m}, \tilde{n}$ можно рассматривать вырожденные ядра

$$\tilde{l}(t,s,\tau) = \sum_{n=1}^{w} l_n(t,s) a_n(\tau), \quad \tilde{m}(t,s,\sigma) = \sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma),$$
$$\tilde{n}(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{u=1}^{r} n_u(t,s) c_u(\tau,\sigma)\,, \tag{3}$$

где $l_n, m_j, n_u \in U$; a_n, b_j, c_u $(n = 1, \ldots, w;\ j = 1, \ldots, v;\ u = 1, \ldots, r)$ – непрерывные функции.

Теорема 2. *Пусть ядра $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$ и $n(t,s,\tau,\sigma)$ непрерывны по совокупности переменных вместе со своими частными производными по переменной t от первого до p-го порядка. Тогда найдутся последовательности операторов L_i, M_i, N_i, K_i с вырожденными ядрами* (3)*, которые сходятся к операторам L, M, N, K соответственно в пространстве $\mathfrak{L}(U)$ ограниченных на U линейных операторов.*

□ Оценим нормы разностей операторов L, M, N и L_i, M_i, N_i соответственно. В силу непрерывности заданных функций l, m и n и функций (3) вместе с частными производными по переменной t до порядка p включительно имеют место оценки:

$$\|L_i x - Lx\|_U = \left\| \int_a^b \sum_{n=1}^{w} l_n(t,s) a_n(\tau) x(\tau,s) d\tau - \int_a^b l(t,s,\tau) x(\tau,s) d\tau \right\|_U =$$

$$= \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{w} l_n(t,s) a_n(\tau) - l(t,s,\tau) \right] x(\tau,s) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \|x\| \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \int_a^b \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\sum_{n=1}^{w} l_n(t,s) a_n(\tau) - l(t,s,\tau) \right] \right| d\tau\,,$$

$$\|M_i x - Mx\|_U = \left\| \int_c^d \sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma) x(t,\sigma) d\sigma - \int_c^d m(t,s,\sigma) x(t,\sigma) d\sigma \right\|_U =$$

$$= \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_c^d \left[\sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma) - m(t,s,\sigma) \right] x(t,\sigma) d\sigma \right| \leq$$

$$\leq \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \int_c^d \sum_{\beta=0}^{k} C_k^\beta \left| \frac{\partial^{k-\beta}}{\partial t^{k-\beta}} \left[\sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma) - m(t,s,\sigma) \right] \right| \cdot \left| \frac{\partial^\beta x(t,\sigma)}{\partial t^\beta} \right| d\sigma \leq$$

$$\leq \|x\| \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \int_c^d \sum_{\beta=0}^{k} C_k^\beta \left| \frac{\partial^{k-\beta}}{\partial t^{k-\beta}} \left[\sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma) - m(t,s,\sigma) \right] \right| d\sigma \,,$$

$$\|N_i x - Nx\|_U \leq$$

$$\leq \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_a^b \int_c^d \left[\sum_{u=1}^{r} n_u(t,s) c_u(\tau,\sigma) - n(t,s,\tau,\sigma) \right] x(\tau,\sigma) d\sigma d\tau \right| \leq$$

$$\leq \|x\| \sup_{t,s} \sum_{k=0}^{p} \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\sum_{u=1}^{r} n_u(t,s) c_u(\tau,\sigma) - n(t,s,\tau,\sigma) \right] \right| d\sigma d\tau \,.$$

Вырожденными ядрами (3) могут быть многочлены, множества которых всюду плотны в C_1, C_2, C_3 соответственно. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $i_0(\varepsilon)$ такой, что неравенства

$$\sum_{k=0}^{p} \int_a^b \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\sum_{n=1}^{w} l_n(t,s) a_n(\tau) - l(t,s,\tau) \right] \right| d\tau < \frac{\varepsilon}{3} \,,$$

$$\sum_{k=0}^{p} \int_c^d \sum_{\beta=0}^{k} C_k^\beta \left| \frac{\partial^{k-\beta}}{\partial t^{k-\beta}} \left[\sum_{j=1}^{v} m_j(t,s) b_j(\sigma) - m(t,s,\sigma) \right] \right| d\sigma < \frac{\varepsilon}{3} \,,$$

$$\sum_{k=0}^{p} \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \left[\sum_{u=1}^{r} n_u(t,s) c_u(\tau,\sigma) - n(t,s,\tau,\sigma) \right] \right| d\sigma d\tau < \frac{\varepsilon}{3}$$

выполняются сразу для всех $(t,s) \in D$ и для всех номеров $i \geq i_0$. В этом случае

$$\|L_i x - Lx\|_U \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|x\| \,, \quad \|M_i x - Mx\|_U \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|x\| \,, \quad \|N_i x - Nx\|_U \leq \frac{\varepsilon}{3} \cdot \|x\| \,,$$

$$\|K_i x - Kx\|_U = \|L_i x + M_i x + N_i x - Lx - Mx - Nx\|_U \leq$$
$$\leq \|L_i x - Lx\| + \|M_i x - Mx\| + \|N_i x - Nx\| \leq \varepsilon \|x\| \,.$$

Следовательно, $\|L_i - L\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|M_i - M\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|N_i - N\| < \frac{\varepsilon}{3}$, $\|K_i - K\| < \varepsilon$.

Таким образом, последовательности операторов L_i, M_i, N_i, K_i с вырожденными ядрами (3) сходятся в $\mathcal{L}(U)$ к операторам L, M, N, K соответственно. ■

3. Нётеровость, фредгольмовость и обратимость. Здесь и далее под нётеровым (фредгольмовым) оператором понимается линейный непрерывный оператор с замкнутой областью значений, у которого размерности ядра и коядра конечны (размерности ядра и коядра конечны и совпадают).

Так как $I - K = (I - L)(I - M) - (LM + N) = (I - M)(I - L) - (ML + N)$, то уравнение (1) эквивалентно уравнениям

$$(I - L)(I - M)x = f + (LM + N)x, \quad (I - M)(I - L)x = f + (ML + N)x \,. \tag{4}$$

Следующее утверждение содержится в [5, с. 73].

Теорема 3. *Если операторы L, M и N непрерывны в банаховом пространстве $X = X(D)$, а операторы $N + LM$ и $N + ML$ компактны в X, то нётеровость оператора $I - K$ равносильна нётеровости операторов $I - L$ и $I - M$. Если дополнительно оператор $I - L$ $(I - M)$ фредгольмов, то фредгольмовость оператора $I - K$ равносильна фредгольмовости оператора $I - M$ $(I - L$ соответственно$)$.*

Следовательно, нётеровость (фредгольмовость) оператора $I - K$ равносильна нётеровости (фредгольмовости) двух операторов $(I - L)(I - M)$ и $(I - M)(I - L)$ и соответственно уравнений $(I - L)(I - M)x = f$ и $(I - M)(I - L)x = f$, которая в свою очередь равносильна нётеровости операторов $I - L$ и $I - M$ и соответственно уравнений

$$(I - L)x = f, \quad (I - M)x = f. \tag{5}$$

Условия обратимости (фредгольмовости, нётеровости) уравнений (5) в пространстве $C(D)$ непрерывных на D функций рассматривались в работе [13]. Аналогичные утверждения для пространства U доказаны в [14].

Теорема 4. *Если $l \in C_1$ и $m \in C_2$, то в пространстве U обратимость, фредгольмовость и нётеровость уравнений (5) совпадают с обратимостью в $C^{(p)}_{[a,b]}$ и $C_{[c,d]}$ соответственно интегральных уравнений Фредгольма второго рода*

$$x(t) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau)d\tau + f(t) \qquad (s \in [c,d]\,,\ f \in C^{(p)}_{[a,b]}),$$

$$x(s) = \int_c^d m(t,s,\sigma)x(\sigma)d\sigma + g(s) \qquad (t \in [a,b]\,,\ g \in C_{[c,d]})\,.$$

Пусть операторы $(I - L)^{-1}$ и $(I - M)^{-1}$ существуют и представимы в виде

$$(I - L)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_a^b r_1(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau\,, \tag{6}$$

$$(I - M)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_c^d r_2(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma\,, \tag{7}$$

где r_1 и r_2 – резольвентные ядра операторов L и M соответственно. Тогда уравнение (1) равносильно уравнениям

$$(I - H)x = u\,, \tag{8}$$

$$(I - P)x = v\,, \tag{9}$$

где $H = (I - M)^{-1}(I - L)^{-1}(LM + N)$, $P = (I - L)^{-1}(I - M)^{-1}(ML + N)$, $u = (I - M)^{-1}(I - L)^{-1}f$, $v = (I - L)^{-1}(I - M)^{-1}f$. Если теперь обратимы операторы $I - H$ и $I - P$, то обратим и оператор $I - K$.

Условия обратимости оператора $I - K$ с p раз непрерывно дифференцируемыми по переменной t ядрами $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ в пространстве U содержит установленная в [15]

Теорема 5. *Фредгольмов оператор $I - K$ (уравнение (1)) с непрерывными по совокупности переменных вместе с частными производными по переменной t до p-го порядка включительно ядрами l, m, n обратим (обратимо) тогда и только тогда, когда обратимы операторы $I - H$ и $I - P$ (уравнения (8)и (9)).*

Пусть операторы $(I - L)^{-1}$ и $(I - M)^{-1}$ существуют и представимы в виде (6) и (7) соответственно. Тогда уравнение (1) равносильно уравнению (8).

Рассмотрим подробнее уравнение (8). Пусть ядра l, m, n непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по переменной t до p-го порядка включительно. Тогда таким же свойством обладают и резольвентные ядра r_1 и r_2. С применением теоремы Фубини в [7, с. 96] для оператора H и функции u получены следующие выражения:

$$(Hx)(t,s) = \int_a^b \int_c^d h(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,,$$

где

$$\begin{gathered} h(t,s,\tau,\sigma) = l(t,s,\tau)m(\tau,s,\sigma) + n(t,s,\tau,\sigma) + \\ + \int_a^b r_1(t,s,\tau_1)l(\tau_1,s,\tau)m(\tau,s,\sigma)d\tau_1 + \int_a^b r_1(t,s,\tau_1)n(\tau_1,s,\tau,\sigma)d\tau_1 + \\ + \int_c^d r_2(t,s,\sigma_1)l(t,\sigma_1,\tau)m(\tau,\sigma_1,\sigma)d\sigma_1 + \int_c^d r_2(t,s,\sigma_1)n(t,\sigma_1,\tau,\sigma)d\sigma_1 + \\ + \int_a^b \int_c^d r_2(t,s,\sigma_1)r_1(t,\sigma_1,\tau_1)l(\tau_1,\sigma_1,\tau)m(\tau,\sigma_1,\sigma)d\sigma_1 d\tau_1 + \\ + \int_a^b \int_c^d r_2(t,s,\sigma_1)r_1(t,\sigma_1,\tau_1)n(\tau_1,\sigma_1,\tau,\sigma)d\sigma_1 d\tau_1\,, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} u(t,s) = f(t,s) + \int_a^b r_1(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int_c^d r_2(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma + \\ + \int_a^b \int_c^d r_2(t,s,\sigma)r_1(t,\sigma,\tau)f(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, в уравнении (8) H – интегральный оператор.

Пусть существует оператор $(I - H)^{-1}$ и

$$(I - H)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_a^b \int_c^d r_3(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,. \tag{12}$$

Тогда решение уравнения (8) запишется в виде

$$x(t,s) = u(t,s) + \int_a^b \int_c^d r_3(t,s,\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)d\tau d\sigma\,. \tag{13}$$

Подставляя (11) в (13), получим

$$
\begin{gathered}
x(t,s) = f(t,s) + \int_a^b r_1(t,s,\tau) f(\tau,s)\, d\tau \; + \int_c^d r_2(t,s,\sigma) f(t,\sigma)\, d\sigma + \\
+ \int_a^b \int_c^d r(t,s,\tau,\sigma) f(\tau,\sigma)\, d\sigma d\tau \,,
\end{gathered} \tag{14}
$$

где

$$
\begin{gathered}
r(t,s,\tau,\sigma) = r_2(t,s,\sigma) r_1(t,\sigma,\tau) + r_3(t,s,\tau,\sigma) \; + \\
+ \int_a^b r_3(t,s,\tau_1,\sigma) r_1(\tau_1,\sigma,\tau) d\tau_1 + \int_c^d r_3(t,s,\tau,\sigma_1) r_2(\tau,\sigma_1,\sigma) d\sigma_1 \; + \\
+ \int_a^b \int_c^d r_3(t,s,\tau_1,\sigma_1) r_2(\tau_1,\sigma_1,\sigma) r_1(\tau_1,\sigma,\tau) d\sigma_1 d\tau_1 \,.
\end{gathered}
$$

Функции r_1, r_2 и r (r_1, r_2 и r_3) называют *резольвентными ядрами* оператора K с частными интегралами (операторов L, M и H соответственно). При этом оператор $(I-K)^{-1}$ определяется правой частью равенства (14), т.е. является оператором такого же типа, что и оператор $I - K$.

Определим вид и условия существования оператора, обратного к оператору $I - H$ в пространстве U. Так как функции l, m, n, r_1, r_2 и f непрерывны вместе со своими частными производными по t до p-го порядка, то полученные по формулам (10) и (11) функции $h(t,s,\tau,\sigma)$ и $u(t,s)$ также p раз непрерывно дифференцируемы по t.

Рассмотрим аппроксимацию оператора H оператором $\widetilde{H}$ с вырожденным ядром $\widetilde{h}(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{i=1}^{q} h_i(t,s) d_i(\tau,\sigma)$, где $h_i \in U$, а функции d_i $(i = 1,\ldots,q)$ образуют ортонормированную систему в $C(D)$, при которой

$$
\sup_{t,s,\tau,\sigma} \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{\partial^k}{\partial t^k} \Big[h(t,s,\tau,\sigma) - \widetilde{h}(t,s,\tau,\sigma) \Big] \right| < \varepsilon < \frac{1}{(b-a)(d-c)} \,.
$$

Тогда для оператора $(\mathcal{H}x)(t,s) = \int_a^b \int_c^d \xi(t,s,\tau,\sigma) x(\tau,\sigma) d\tau d\sigma$ с ядром $\xi(t,s,\tau,\sigma) = h(t,s,\tau,\sigma) - \widetilde{h}(t,s,\tau,\sigma)$ выполняется условие $\|\mathcal{H}\|_{\mathcal{L}(U)} < 1$ и уравнение $(I - \mathcal{H})x = u$ имеет для любой функции $u \in U$ единственное решение из U

$$
x(t,s) = u(t,s) + \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau,\sigma) u(\tau,\sigma) d\sigma d\tau \,,
$$

где

$$
\zeta(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi^{(j)}(t,s,\tau,\sigma) \tag{15}
$$

– резольвентное ядро оператора $\mathcal{H}$, а $\xi^{(j)}$ – итерированные ядра, причем $\xi^{(1)}(t,s,\tau,\sigma) = \xi(t,s,\tau,\sigma)$,

$$\xi^{(j)}(t,s,\tau,\sigma) =$$

$$= \int_a^b \int_c^d \xi(t,s,\tau_{j-1},\sigma_{j-1})\xi^{(j-1)}(\tau_{j-1},\sigma_{j-1},\tau,\sigma)d\tau_{j-1}d\sigma_{j-1} \qquad (j = 2,3,\ldots)\,.$$

Так как $I - H = I - \mathcal{H} - \widetilde{H} = (I-\mathcal{H})(I-(I-\mathcal{H})^{-1}\widetilde{H})$, то уравнение (8) можно записать в виде

$$(I-(I-\mathcal{H})^{-1}\widetilde{H})x = w\,,$$

где

$$w(t,s) = u(t,s) + \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,,$$

$$((I-\mathcal{H})^{-1}x)(t,s) = x(t,s) + \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,,$$

$$((I-\mathcal{H})^{-1}\widetilde{H}x)(t,s) = \int_a^b \int_c^d [\widetilde{h}(t,s,\tau,\sigma) \ +$$

$$+ \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau_1,\sigma_1)\widetilde{h}(\tau_1,\sigma_1,\tau,\sigma)d\sigma_1 d\tau_1]x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau =$$

$$= \int_a^b\int_c^d \sum_{i=1}^q d_i(\tau,\sigma)[h_i(t,s) + \int_a^b\int_c^d \zeta(t,s,\tau_1,\sigma_1)h_i(\tau_1,\sigma_1)d\sigma_1 d\tau_1]x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau =$$

$$= \int_a^b \int_c^d \sum_{i=1}^q \overline{h}_i(t,s)d_i(\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau = (\overline{H}x)(t,s)\,,$$

$$\overline{h}_i(t,s) = h_i(t,s) + \int_a^b \int_c^d \zeta(t,s,\tau_1,\sigma_1)h_i(\tau_1,\sigma_1)d\sigma_1 d\tau_1\,,$$

очевидно, – p раз непрерывно дифференцируемая по t функция и

$$\overline{h}(t,s,\tau,\sigma) = \sum_{i=1}^q \overline{h}_i(t,s)d_i(\tau,\sigma)$$

– ядро интегрального оператора $\overline{H}$. Таким образом, уравнение (8) сводится к уравнению

$$x(t,s) - \sum_{i=1}^q \overline{h}_i(t,s) \int_a^b \int_c^d d_i(\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau = w(t,s)\,.$$

Тогда

$$x(t,s) - \sum_{i=1}^q \overline{h}_i(t,s)y_i = w(t,s)\,, \tag{16}$$

где
$$y_i = \int_a^b \int_c^d d_i(\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,. \tag{17}$$
Подставляя (16) в (17), получим систему
$$y_i - \sum_{j=1}^{q} y_j\eta_{ij} = w_i \qquad (i=1,\ldots,q)\,; \tag{18}$$
здесь
$$w_i = \int_a^b \int_c^d d_i(\tau,\sigma)w(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,, \qquad \eta_{ij} = \int_a^b \int_c^d d_i(\tau,\sigma)\overline{h}_j(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,.$$
Определитель этой системы
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\eta_{11} & \ldots & -\eta_{1q} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\eta_{q1} & \ldots & 1-\eta_{qq} \end{vmatrix}. \tag{19}$$
Если $\Delta \neq 0$, то оператор $I - \overline{H}$ обратим, а система (18) имеет единственное решение
$$y_i = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{q} \Delta_{ji}w_j \qquad (i=1,\ldots,q)\,,$$
где Δ_{ji} – алгебраическое дополнение элемента c_{ij} $(i,j=1,\ldots,q)$ в (19). Подставляя это решение в (16) и учитывая определение w_j, получим
$$x(t,s) = w(t,s) + \int_a^b \int_c^d \overline{r}_3(t,s,\tau,\sigma)w(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,, \tag{20}$$
где резольвентное ядро оператора $\overline{H}$ определяется по формуле
$$\overline{r}_3(t,s,\tau,\sigma) = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} \Delta_{ji}\overline{h}_i(t,s)d_j(\tau,\sigma)\,. \tag{21}$$
Подставляя теперь в (20) выражение для $w(t,s)$, получим
$$x(t,s) = u(t,s) + \int_a^b \int_c^d r_3(t,s,\tau,\sigma)u(\tau,\sigma)d\sigma d\tau\,,$$
где
$$\begin{gathered} r_3(t,s,\tau,\sigma) = \zeta(t,s,\tau,\sigma) + \overline{r}_3(t,s,\tau,\sigma) \; + \\ + \int_a^b \int_c^d \overline{r}_3(t,s,\tau_1,\sigma_1)\zeta(\tau_1,\sigma_1,\tau,\sigma)d\sigma_1 d\tau_1\,, \end{gathered} \tag{22}$$

а ζ, $\overline{r}_3$ определяются по формулам (15) и (21). Следовательно, при $\Delta \neq 0$ оператор $(I-H)^{-1}$ имеет вид (12) и p раз непрерывно дифференцируемое по t резольвентное ядро r_3 определяется по формуле (22).

Операторы и уравнения с частными интегралами в пространстве $C(D)$ изучались в работе [16], где в явном виде построено решение уравнения (1) в случае вырожденных ядер. В пространстве U для уравнений с вырожденными ядрами (3) резольвентные ядра r_1, r_2 операторов L, M соответственно можно найти, пользуясь формулами [15]:

$$r_1(t,s,\tau) = \frac{1}{\Delta_1(s)} \sum_{i=1}^{w} \sum_{j=1}^{w} \Delta_{1ji}(s) l_i(t,s) a_j(\tau)\,,$$

$$r_2(t,s,\sigma) = \frac{1}{\Delta_2(t)} \sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{v} \Delta_{2ji}(t) m_i(t,s) b_j(\sigma)\,,$$

где $\Delta_{1ji}(s)$ и $\Delta_{2ji}(t)$ – алгебраические дополнения элементов a_{ij} $(i,j=1,\ldots,w)$ и b_{ij} $(i,j=1,\ldots,v)$ соответственно в определителях:

$$\Delta_1(s) = \begin{vmatrix} 1-\chi_{11}(s)\ldots-\chi_{1w}(s) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\chi_{w1}(s)\ldots 1-\chi_{ww}(s) \end{vmatrix}, \quad \Delta_2(t) = \begin{vmatrix} 1-\vartheta_{11}(t)\ldots-\vartheta_{1v}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\vartheta_{v1}(t)\ldots 1-\vartheta_{vv}(t) \end{vmatrix},$$

$\chi_{ij}(s) = \int\limits_a^b a_i(\tau) l_j(\tau,s)d\tau$ $(i,j=1,...,w)$, $\vartheta_{jk}(t) = \int\limits_c^d b_j(\sigma) m_k(t,\sigma)d\sigma$ $(j,k=1,...,v)$. Справедлива

Теорема 6. *Уравнение* (1) *с вырожденными ядрами* l, m, n *вида* (3) *обратимо в* U *тогда и только тогда, когда* $\Delta_1(s) \neq 0$, $\Delta_2(t) \neq 0$ *и* $\Delta \neq 0$.

$\square$ Для ядер вида (3) операторы L, M, N действуют в U, операторы $LM+N$ и $ML+N$ компактны, поэтому условие $\Delta_1(s) \neq 0$ и $\Delta_2(t) \neq 0$ означает фредгольмовость $I-K$ [15], что влечет обратимость $I-L$ и $I-M$. Как было показано выше, операторы $(I-L)^{-1}$ и $(I-M)^{-1}$ существуют и представимы в виде (6) и (7), следовательно, по теореме 5 обратимость $I-K$ равносильна обратимости $I-H$, а условие $\Delta \neq 0$ эквивалентно обратимости $I-H$.

Пусть теперь оператор $I-K$ обратим, тогда он фредгольмов. Следовательно, $\Delta_1(s) \neq 0$ и $\Delta_2(t) \neq 0$ и обратимость $I-K$ равносильна обратимости $I-H$, то есть условию $\Delta \neq 0$. $\blacksquare$

Литература

1. Александров В.М. Коваленко Е.В. Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред // Докл. АН СССР. – 1980. – 252;3. – С.324–328.

2. Александров В.М., Коваленко Е.В. О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа // Докл. АН СССР. – 1984. – 275;4. – С.827–830.

3. Манжиров А.В. Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией // Прикл. математика и механика. – 1985. – 49;6. – С.1019–1025.

4. Appell J., Kalitvin A.S., Nashed M.Z. On some partial integral equations arising in the mechanics of solids // Zeitschr. Ang. Math. Mech. – 1999. – 79;2. – P.703–713.

5. Калитвин А.С. Линейные операторы с частными интегралами. – Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

6. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations / J.M. Appell. – New York-Basel: Marcel Dekker inc., 2000. – 560 p.

7. Калитвин А.С., Фролова Е.В. Линейные операторы с частными интегралами. C-теория / А.С. Калитвин. – Липецк: ЛГПУ, 2004. – 196 с.

8. Калитвин А.С., Калитвин В.А. Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами / А.С. Калитвин. – Липецк: ЛГПУ, 2007. – 178 с.

9. Калитвин А.С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами / А.С. Калитвин. – Липецк: ЛГПУ, 2007. – 196 с.

10. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн / С.А. Габов. – М.: Наука, 1990. – 344 с.

11. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

12. Калитвин А.С., Барышева И.В. Об операторах с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций / Операторы с частными интегралами. 2 / А.С. Калитвин. – Липецк, 1997. – С.12-19.

13. Калитвин А.С. Об одном классе интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42;9. – С.1194–1200.

14. Барышева И.В. Об одном классе интегральных уравнений в пространстве частично дифференцируемых функций // Чернозёмный альманах научных исследований. Серия: “Фундаментальная математика”. – Воронеж, 2009. – 1(8). – С. 12-27.

15. Калитвин А.С., Барышева И.В., Фролова Е.В. О фредгольмовости уравнений с частными интегралами в пространстве частично дифференцируемых функций / Операторы с частными интегралами / А.С. Калитвин. – Липецк, 2003. – 5. – С.34-47.

16. Околелов О.П. Исследование уравнений с частными интегральными операторами / Дисс. к.ф.-м.н. – Иркутск, 1967. – 147 с.

ABOUT IRREVERSIBILITY EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS IN SPACES OF PARTIALLY DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

I.V. Barysheva

Lipetsk State Pedagogical University,
Lenina, str. 42, Lipetsk, 398020, Russia, e-mail:barysheva_iv@mail.ru

Abstract. Reversibility condition and conditions of realization of Noether's and Fredholm's properties with zero index of linear equations with partial derivatives in the space of partially differentiable functions of two variables are investigated. Main results are obtained due to application of approximations of operators with partial integrals by such type operators having degenerated kernels.

Key words: operators and equations with partial integrals, Noether's property, Fredholm's property with zero index, irreversibility, operator approximations.

УДК 519.213.5 + 519.217.4

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАНДЕЛЯ

Ю.П. Вирченко, Н.Н. Витохина

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Изучается распределение вероятностей Манделя квантовой оптики в случае одномодового циклически поляризованного стохастического излучения. Для этого распределения вероятностей доказана локальная предельная теорема при неограниченном росте времени регистрации T.

Ключевые слова: распределение Манделя, локальная предельная теорема, процесс Орнштейна-Уленбека.

1. Введение. Изучается распределение вероятностей для случайного числа фотоотсчётов при фотодетектировании оптического поля малой интенсивности. Особенностью такого физического процесса является то, что электромагнитного поле регистрируется отдельными порциями, состоящими из групп фотонов, и чем ниже интенсивность излучения, и чем больше разрешающая способность квантового счётчика, тем более вероятна регистрация отдельных фотонов. Число фотоотсчётов в течение времени регистрации T, с необходимостью, является случайным. Эта случайность является следствием двух причин. Первая из них – квантовая природа регистрируемого электромагнитного излучения, вторая связана с тем, что поле может иметь помимо регулярной (сигнальной) составляющей, также и стохастическую (шумовую). Если регистрируемое электромагнитное поле содержит стохастическую составляющую, то его квантовое состояние является статистически *смешанным* и описывается матрицей плотности. Распределение вероятностей $P_T(n)$ для числа фотоотсчётов получается посредством некоторой специальной процедуры усреднения диагонали этой матрицы плотности в представлении *чисел заполнения* фотонов [1]. Мы будем изучать, с чисто математической точки зрения, модель квантового счётчика фотонов одномодового циклически поляризованного полностью стохастического (без сигнальной составляющей) электромагнитного излучения. Нашей целью является асимптотика распределения вероятностей $P_T(n)$ для больших значений времени регистрации T.

2. Распределение Манделя. Известно (см., например, [1],[2],[3]), что случайное число $\tilde{n}$ фотоотсчётов квантового низкоинтенсивного оптического излучения имеет в качестве своего распределения вероятностей $P_T(n)$ т.н. *составное распределение Пуассона*, называемое в квантовой оптике распределением Манделя,

$$P_T(n) \equiv \Pr\{\tilde{n} = n\} = \frac{1}{n!}\mathsf{E}\left(\tilde{J}(T)\right)^n \exp[-\tilde{J}(T)]\,, \qquad (1)$$

Здесь $\tilde{J}(T)$ – случайная величина, представляющая собой поглощённую за время регистрации T энергию электромагнитного поля. Она определяется формулой

$$\tilde{J}(T) = \mathsf{J}_T[\tilde{z}] = \int_0^T |\tilde{z}(s)|^2 \, ds \,. \tag{2}$$

Одномодовый циклически поляризованный электромагнитный шум описывается комплекснозначным случайным процессом Орнштейна-Уленбека с траекториями $\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t)+i\tilde{y}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, у которых $\tilde{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ и $\tilde{y}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ являются траекториями стохастически эквивалентных и независимых процессов Орнштейна-Уленбека, моделирующих, с физической точки зрения, соответственно, электрическую и магнитную составляющие шумового поля.

Каждый из стационарных процессов $\langle \tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, $\langle \tilde{y}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$ определяется посредством одинаковых (ввиду стохастической эквивалентности этих процессов) стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}}(t) + \nu\tilde{x}(t) = \tilde{\varphi}_x(t) \,, \quad \dot{\tilde{y}}(t) + \nu\tilde{y}(t) = \tilde{\varphi}_y(t) \,,$$

$\nu > 0$, где $\tilde{\varphi}_x(t)$, $\tilde{\varphi}_y(t)$ – стохастически независимые и эквивалентные «белые шумы» с одной и той же интенсивностью $\sigma > 0$, $\langle \varphi_x(t)\varphi_x(t')\rangle = \sigma\delta(t-t')$, $\langle \varphi_y(t)\varphi_y(t')\rangle = \sigma\delta(t-t')$.

Таким образом, фиксация значений двух параметров $\nu > 0$ и $\sigma > 0$ полностью определяет распределения вероятностей этих двух случайных процессов и, поэтому, полностью определяет распределения вероятностей случайных величин $\mathsf{J}_T[\tilde{x}]$, $\mathsf{J}_T[\tilde{y}]$. Принимая во внимание независимость и эквивалентность процессов $\langle \tilde{x}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, $\langle \tilde{y}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, можно утверждать независимость и эквивалентность случайных величин $\mathsf{J}_T[\tilde{x}]$, $\mathsf{J}_T[\tilde{y}]$. Это влечёт выполнение равенств

$$Q_T[\lambda; \tilde{z}] = Q_T[\lambda; \tilde{x}]Q_T[\lambda; \tilde{y}] = \left(Q_T[\lambda; \tilde{x}]\right)^2 \,, \tag{3}$$

связывающих производящие функции

$$Q_T[\lambda; \tilde{z}] = \mathsf{E}\exp\left(-\lambda \mathsf{J}_T[\tilde{z}]\right) \,, \quad Q_T[\lambda; \tilde{x}] = \mathsf{E}\exp\left(-\lambda \mathsf{J}_T[\tilde{x}]\right) \,,$$

что, наряду с результатом А.Зигерта (см., например, [2],[3]) приводит к формуле

$$Q_T[\lambda; \tilde{z}] = \frac{4r\nu\exp(\nu T)}{(r+\nu)^2\exp(rT) - (r-\nu)^2\exp(-rT)} \,, \tag{4}$$

где $r = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\sigma}$. Свойство мероморфности функции $Q_T[\lambda; \tilde{z}]$ и наличие для неё явной формулы (4) позволяет применять для исследования свойств довольно сложного, задаваемого неявно распределения Манделя $P_T(n)$, посредством формулы (1), методы функций комплексного переменного, как для качественных рассуждений, так и для прямых вычислений.

3. Локальная предельная теорема. Пусть $\Upsilon(s)$ – характеристическая функция распределения Манделя

$$\Upsilon(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ins} \Pr\{\tilde{n} = n\} . \tag{5}$$

Тогда, очевидно, что имеет место

Лемма 1. *Имеет место формула*

$$\Upsilon(s) = Q_T[1 - e^{is}; \tilde{z}] . \tag{6}$$

□ Согласно определению, имеем

$$\Upsilon(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{isn}}{n!} \mathsf{E} \left(\tilde{J}(T)\right)^n \exp\left(-\tilde{J}(T)\right) = \mathsf{E} \exp\left(\tilde{J}(e^{is} - 1)\right) = Q_T[1 - e^{is}; \tilde{z}] .$$

Перестановочность суммирования и вычисления математического ожидания следует из равномерной по $m \in \mathbb{N}$ оценки

$$\left| \sum_{n=0}^{m} \frac{e^{isn}}{n!} (\tilde{J}(T))^n \exp(-\tilde{J}(T)) \right| \leqslant \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} (\tilde{J}(T))^n \exp(-\tilde{J}(T)) < 1 ,$$

которая показывает, что применима теорема Фату для интеграла Лебега (обозначаемого посредством оператора E) по вероятностной и, следовательно, конечной мере от последовательности функций

$$\langle \sum_{n=0}^{m} (\tilde{J}(T))^n \exp(-\tilde{J}(T)) \ ; \ m \in \mathbb{N} \ \rangle .$$

Применение этой теоремы как раз и обосновывает перестановочность суммирования по n и оператора E. ■

Следствие 1. *Средние значения* $\mathsf{E}\tilde{n}$ *и* $\mathsf{E}\tilde{J}(T)$ *совпадают.*

□ Так как

$$\mathsf{E}\tilde{n} = -i \left(\frac{\partial}{\partial s} Q_T[1 - e^{is}; \tilde{z}] \right)_{s=0} , \qquad \mathsf{E}\tilde{J}(T) = -\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} Q_T[\lambda; \tilde{z}] \right)_{\lambda=0} ,$$

то утверждение следует из равенства

$$\frac{\partial}{\partial s} Q_T[1 - e^{is}; \tilde{z}] = \frac{d\lambda}{ds} \frac{\partial}{\partial \lambda} Q_T[\lambda; \tilde{z}]$$

при $\lambda = 1 - e^{is}$,

$$\left(\frac{d\lambda}{ds} \right)_{s=0} = -i . \quad ■$$

Следствие 2. *Справедлива формула*

$$\mathsf{E}\tilde{n} = T\mathsf{E}|\tilde{z}(s)|^2 = \frac{T\sigma}{\nu} \equiv \Theta\,. \tag{7}$$

□ Используя формулу (4), вычислим производную

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} Q_T[\lambda;\tilde{z}]\right)_{\lambda=0} = \frac{T\sigma}{\nu}\,.$$

Согласно определению комплекснозначного процесса Орнштейна-Уленбека, имеем

$$\mathsf{E}|\tilde{z}(t)|^2 = \mathsf{E}(\tilde{x}(t))^2 + \mathsf{E}(\tilde{y}(t))^2 =$$

$$= \left(\frac{\nu}{\pi\sigma}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp\left(-\nu x^2/\sigma\right) dx + \left(\frac{\nu}{\pi\sigma}\right)^{1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 \exp\left(-\nu y^2/\sigma\right) dx = \frac{\sigma}{\nu}\,. \quad \blacksquare$$

Таким образом, среднее $\mathsf{E}\tilde{n}$ полностью определяется одним физически естественным безразмерным параметром $\Theta = \sigma T/\nu$.

Покажем, что локальное поведение распределения вероятностей Манделя при $\Theta \to \infty$ является следствием эргодичности процесса Орнштейна-Уленбека.

Теорема 1. *Для распределения Манделя $P_T(n)$ при $\Theta \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$P_T(n) = \frac{\Theta^n}{n!} \exp\left(-\Theta\right)\left(1 + o(1)\right). \tag{8}$$

□ Для эргодического процесса $\langle \tilde{z}(t); t \in \mathbb{R}\rangle$, с вероятностью 1, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T |\tilde{z}(t)|^2 dt = \mathsf{E}|\tilde{z}(t)|^2\,.$$

Используя Следствие 2 предыдущей леммы, отсюда получаем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T |\tilde{z}(t)|^2 dt = \frac{\sigma}{\nu}\,. \tag{9}$$

По той же причине, при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо, с той же вероятностью, предельное соотношение

$$\lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T} \int\limits_0^T |\tilde{z}(t)|^2 dt\right)^n = \left(\mathsf{E}|\tilde{z}(t)|^2\right)^n = \left(\frac{\sigma}{\nu}\right)^n. \tag{10}$$

Формулу (10) запишем в виде

$$\lim_{T\to\infty} \left(T^{-1}\tilde{J}(T)\right)^n = \left(\frac{\sigma}{\nu}\right)^n. \tag{11}$$

На основе полученных предельных соотношений распределение Манделя записывается как

$$P_T(n) = \frac{\Theta^n}{n!}\mathsf{E}(1+\tilde{j}_T)^n \exp(-\Theta(1+\tilde{j}_T))\,, \tag{12}$$

где случайная величина $\tilde{j}_T$ с вероятностью 1 стремится к нулю (становится неслучайной) при $T \to \infty$. Последнее означает, что функция распределения $\Pr\{\tilde{j}_T < x\}$ стремится к функции Хевисайда $\theta(x)$ при $T \to \infty$. Формулу (12) представим в форме

$$P_T(n) = \frac{\Theta^n}{n!}\exp(-\Theta)\,\mathsf{E}(1+\tilde{j}_T)^n \exp(-(\sigma T/\nu)\tilde{j}_T)) =$$

$$= \frac{\Theta^n}{n!}\exp(-\Theta)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x)^n\exp(-\Theta x)\,d\Pr\{\tilde{j}_T < x\}\,.$$

Переходя в интеграле последнего выражения к пределу $T \to \infty$ и используя теорему Хелли, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x)^n\exp(-\Theta x)\,d\Pr\{\tilde{j}_T < x\} \to \int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+x)^n\exp(-\Theta x)\,d\theta(x) = 1.$$

Следовательно, имеет место формула (8). ■

Обозначив пуассоновское распределение

$$P_T^{(0)}(n) = \frac{\Theta^n}{n!}\exp(-\Theta)\,, \tag{13}$$

из доказанной теоремы заключаем

Следствие. *$P_T(n)/P_T^{(0)}(n) \to 1$ при $T \to \infty$.*

Литература

1. Mandel L. Progress in Optics, Vol.2 / ed. E.Wolf. – Amsterdam: North-Holland, 1963. – 180p.

2. Lax M. Fluctuation and Coherence Phenomena in Classical and Quantum Physics / M. Lax. – New York: Gordon & Breach, 1968.
(пер. на рус. яз.: Лэкс М. Флуктуации и когерентные явления / М. Лэкс. – М.: Мир, 1974.– 300c.)

3. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / А.С. Мазманишвили. – Киев: Наукова думка, 1987. – 224c.

LOCAL LIMIT THEOREM OF MANDEL's DISTRIBUTION

Yu.P. Virchenko, N.N. Vitokhina

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. The Mandel probability distribution used in quantum optics is studied in the case of one-mode circled polarized stochastic optic irradiation. The local limit theorem is proved for the distribution when the registration time T is increased unboundedly.

Key words: Mandel's distribution, local limit theorem, Ornstein-Uhlenbeck's process.

УДК 511.3

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ АЛГОРИТМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.Е. Коротков, О.А.Матвеева

Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410026, Россия, e-mail:korotkovae@info.sgu.ru

Аннотация. В работе приводится численный алгоритм, который позволяет достаточно быстро определить в полуплоскости $\sigma > 1/2$ нули целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Ключевые слова: ряд Дирихле, L-функции Дирихле, функциональное уравнение.

В работе [1] показано, что важную роль при решении проблемы о взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана играет ответ на следующий вопрос: существуют ли в полуплоскости $\sigma > 1/2$ общие нули целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

Особый интерес, в связи с этой задачей, представляют ряды Дирихле, являющиеся линейной комбинацией L-функций Дирихле с первообразными характерами одного и того же модуля. Как показано в [2] такие ряды Дирихле удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана и, как будет видно ниже, имеют бесконечное число нулей в полуплоскости $\sigma > 1/2$. Поэтому положительный ответ на поставленный выше вопрос позволяет сделать важные выводы о зависимости расширенной гипотезы Римана от основной гипотезы, и о том, что условие удовлетворения функциональному уравнению типа Римана не накладывает существенных ограничений на нули таких функций.

В данной работе приводится достаточно простой алгоритм вычислительной схемы, позволяющий определять в полуплоскости $\sigma > 1/2$ нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами.

1. О нулях целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами

Приведем известные факты, связанные с аналитическими свойствами целых функций, заданных рядами Дирихле с конечнозначными коэффициентами, которые влияют на расположение нулей таких функций.

В работе [3] показано, что ряды Дирихле с конечнозначными, мультипликативными коэффициентами, которые определяют целые функции и удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана, являются L-функциями Дирихле.

В случае немультипликативных коэффициентов условие подчинения функциональному уравнению типа Римана не накладывает сильных ограничений на расположение нулей даже в случае периодических коэффициентов. Как уже отмечалось во введении, ряды Дирихле, которые являются линейной комбинацией L-функций Дирихле с различными первообразными характерами данного модуля удовлетворяют функциональному уравнению типа Римана. В [4, гл. IV, § 5] доказано следующее утверждение

Теорема 1. *Пусть χ_1 и χ_2 неэквивалентные характеры Дирихле. Тогда функция*

$$f(s) = c_1 L(s, \chi_1) + c_2 L(s, \chi_2), \qquad s = \sigma + it,$$

где $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $L(s, \chi_1)$, $L(s, \chi_2)$ – L-функции Дирихле, имеет в полосе $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, где $\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$, бесконечно много нулей.

К сожалению, авторы не смогли, исходя из приведенных выше фактов, ответить на следующий вопрос: для любого ли нуля z_0, $\operatorname{Re} z_0 > 1/2$, целой функции, заданной рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, существует целая функция, заданная рядом Дирихле с периодическими коэффициентами, не равная нулю в точке z_0. Как уже отмечалось выше ответ на этот вопрос связан с проблемой о взаимосвязи основной и расширенной гипотез Римана.

Ниже приводится численная схема определения нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, применение которой позволяет сделать предположение относительно ответа на поставленный вопрос.

2. О приближении полиномами Дирихле целых функций, определяемых в полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ рядами Дирихле с периодическими коэффициентами

Как показано в работе [5], целая функция $f(s)$, определяемая рядом Дирихле

$$f(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

с периодическими коэффициентами, допускает в полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ приближение полиномами Дирихле

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^{(n)}}{k^s} \tag{2}$$

с той же скоростью, с какой функция $g(x)$, заданная степенным рядом

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \tag{3}$$

с теми же коэффициентами a_k, что и ряд Дирихле (1), допускает на отрезке $[0; 1]$ приближение алгебраическими полиномами

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k^{(n)} x^k . \tag{4}$$

При этом полиномы Дирихле вида (2) имеют те же коэффициенты, что и алгебраические полиномы вида (4).

Легко видно, что для целых функций вида (1) в случае периодических коэффициентов a_n степенной ряд (3) определяет рациональную функцию

$$g(x) = \frac{\widetilde{P}_{d-1}(x)}{1 + x + \ldots + x^{d-1}}\ , \tag{5}$$

где d – период для a_k.

Полюсы функции $g(z)$, как функции комплексного переменного, лежат на единичной окружности, и эта функция регулярна в точке $z = 1$. В нашем случае, функцию $g(z)$ будем считать регулярной и в точке $z = -1$.

Пусть D_{ρ_0} обозначает область, ограниченную эллипсом, фокусы которого находятся в точках ± 1 и сумма полуосей которого равна ρ_0. Кроме того, функция $g(z)$ регулярна внутри области D_{ρ_0} и имеет хотя бы один полюс на границе этой области.

Пусть в этом случае $E_n(g)$ обозначает величину наилучшего приближения функции (5) на отрезке $[-1; 1]$ алгебраическими полиномами, степени которых не превосходят n. Тогда теорема Бернштейна [6] утверждает что величина $E_n(g)$ ведет себя следующим образом

$$E_n(g) = O\left(\frac{1}{\rho^n}\right), \tag{6}$$

для любого $\rho:\ 1 < \rho < \rho_0$.

Как показано в [6], оценка (6) имеет место и в случае приближения функции $g(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ алгебраическими полиномами вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} x^k\ , \tag{7}$$

где

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \qquad x \in [-1; 1]$$

– разложение функции $g(x)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева. Здесь

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} g(t)\, T_k(t)\, dt \tag{8}$$

при $k \geq 1$.

В силу сказанного выше имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть ряд Дирихле* (1) *с периодическими коэффициентами определяет целую функцию. Тогда существует последовательность полиномов Дирихле* $Q_n(s)$ *вида* (2), *такая, что в любой полосе:* $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ *имеют место следующие оценки*

$$\|f(s) - Q_n(s)\| \leq \frac{C}{\rho^n}\ ,$$

где ρ – некоторая константа, большая единицы.

Заметим, что в качестве коэффициентов полиномов Дирихле $Q_n(s)$ можно взять коэффициенты алгебраических полиномов $P_n(x)$ вида (7).

3. Алгоритм и вычислительная схема определения в полуполосе $\sigma > \frac{1}{2}$ нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами

Пусть $f(z)$ – целая функция, определенная рядом Дирихле (1) с периодическими коэффициентами, и пусть $g(x)$ соответствующий степенной ряд (3).

Во-первых, определим вид рациональной функции $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{d}\sum_{m=0}^{\infty} a_{(md+k)}x^{md+k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{d} a_k x^k \sum_{m=0}^{\infty} x^{md} = (1-x^d)^{-1}\sum_{k=1}^{d} a_k x^k = \frac{\widetilde{P}_{d-1}(x)}{1+x+\ldots+x^{d-1}}\,. \qquad (9)$$

Во-вторых, определим коэффициенты c_k разложения (7) по формулам (8). При этом имеет смысл предварительно разложить рациональную дробь (9) в сумму простейших. Далее, находим коэффициенты $b_k^{(n)}$ полинома $P_n(x)$ (7). При этом полиномы Чебышева $T_k(x)$ определяем исходя из рекуррентного соотношения:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)\,, \qquad T_0 = 1, \qquad T_1 = x.$$

После этого выпишем полиномы Дирихле $Q_n(s)$ (2) и найдем комплексные нули таких полиномов. Известно [7], что в любой полосе $\sigma \geq \sigma_0 > 0$, $|t| < T$ нули полиномов $Q_n(s)$ с ростом n стремятся к нулям функции $f(s)$, и, так как полиномы $Q_n(s)$ сходятся к $f(s)$ с показательной скоростью, то будет наблюдаться достаточно быстрая сходимость нулей полиномов $Q_n(s)$.

Проиллюстрируем описанный выше алгоритм на отдельных примерах. Рассмотрим ряд со следующими коэффициентами:

$$a_i = \begin{cases} 0, & n \equiv 0(3), \\ 1, & n \equiv 1(3), \\ -1, & n \equiv 2(3). \end{cases}$$

Нули полинома Дирихле, построенные для указанного ряда, располагаются на прямой $\sigma = 1/2$ тем больше, чем выше степень полинома. В силу симметричности нулей, нижнюю полуплоскость изображать не будем:

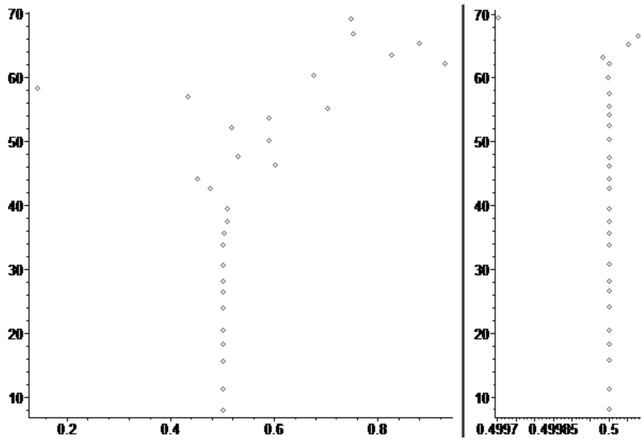

Рис. 1. Расположение нулей аппроксимационных полиномов 57 и 112 степеней.

Аналогичная картина наблюдается для ряда с коэффициентами:

$$a_i = \begin{cases} 0, \; n \equiv 0(5), \\ 1, \; n \equiv 1(5), \\ 1, \; n \equiv 2(5), \\ -1, \; n \equiv 3(5), \\ -1, \; n \equiv 4(5). \end{cases}$$

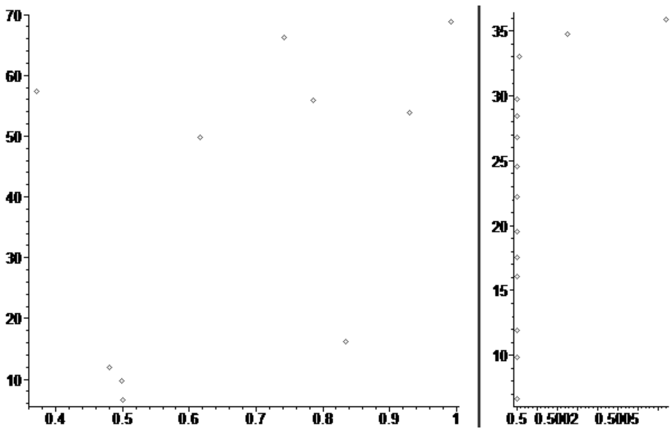

Рис. 2. Расположение нулей аппроксимационных полиномов 28 и 83 степеней.

Но для ряда с периодическими, немультипликативными коэффициентами:

$$a_i = \begin{cases} 0, \; n \equiv 0(5), \\ 1, \; n \equiv 1(5), \\ -1, \; n \equiv 2(5), \\ 1/2, \; n \equiv 3(5), \\ -1/2, \; n \equiv 4(5), \end{cases}$$

нули к прямой $\sigma = 1/2$ не сходятся и в полосе $1/2 < \sigma < 1$ содержится большое их количество.

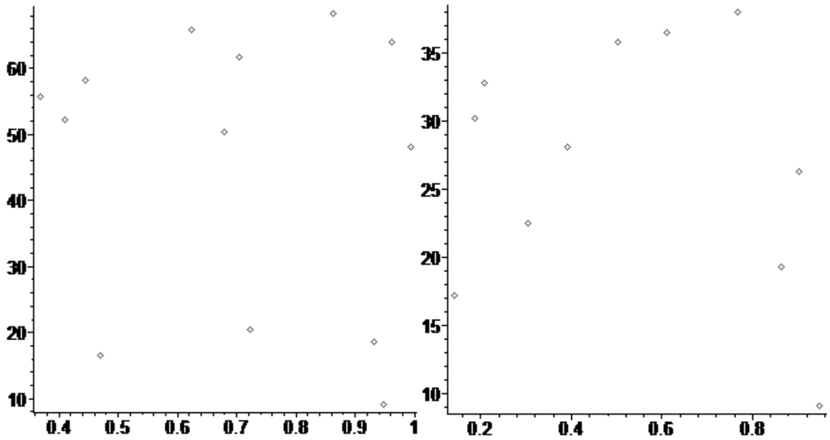

Рис. 3. Расположение нулей аппроксимационных полиномов 27 и 67 степеней.

В результате численного эксперимента, основанного на приведенной здесь схеме, авторы показали, что в области $0 < \sigma < 1$, $|t| < 10^5$ нет общих нулей целых функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами, что позволяет предположить, что расширенная гипотеза Римана является следствием основной гипотезы.

Нужно отметить, что в численном эксперименте при $|t| < 10^5$ были задействованы только ряды Дирихле с периодами коэффициентов $d = 3$ и $d = 5$. Возможно, что таких рядов Дирихле будет достаточно, чтобы получить ответ на вопрос, поставленный в разделе 1 данной работы.

Представляет интерес и другой вопрос, возникший в процессе численного эксперимента, выяснить почему, и как это зависит от степени, нули аппроксимационных полиномов, в случае коэффициентов мультипликативного вида, с ростом степени этих полиномов до определенной величины $|t|$ располагаются на критической прямой?

Литература

1. Кузнецов В.Н., Полякова О.А. Расширенная гипотеза Римана и нули функций, заданных рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Чебышевский сборник: Науч.-теор. журн. – Тула, 2010. – 11;1. – С.188-199.

2. Кузнецов В.Н. К вопросу описания рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами, определяющих целые функции и удовлетворяющих функциональному уравнению типа Римана // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2011. – 11;3 (часть 1). – С.21–25.

3. Кривобок В.В. О рядах Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами, удовлетворяющими функциональному уравнению римановского типа // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2007. – 7;1. – С.13-15.

4. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана / С.М. Воронин. – М.: Физматлит, 1994. – 376 с.

5. Кузнецов, В.Н. Аппроксимационный критерий периодичности конечнозначных функций натурального аргумента / Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам / Межвуз. сб. науч. тр. – Саратов, 2003. – 2. – С.27-32.

6. Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций / И.К. Даугавет. – Л.: ЛГУ, 1977.

7. Титчмарш Е. Теория функций / Е. Титчмарш. – М.: Наука, 1980.

NUMERICAL ALGORITHM OF ZEROES CALCULATION OF ENTIRE FUNCTIONS DEFINED BY DIRICHLET'S SERIES WITH PERIODIC COEFFICIENTS

A.E. Korotkov, O.A. Matveeva

Saratov State University,

Astrakhanskaya, 83, Saratov, 410026, Russia, e-mail:korotkovae@info.sgu.ru

Abstract. It is given the numerical sufficiently fast algorithm that permit to calculate zeroes of entire functions which is in the semiplane $\sigma > 1/2$ and is defined by Dirichlet's series with periodic coefficients.

Key words: Dirichlet's series, Dirichlet's L-function, functional equation.

УДК 517.9

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА-КИПРИЯНОВА ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ НОСИТЕЛЕМ

Л.Н.Ляхов, О.И. Попова

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия,
e-mail: lyakhov@box.vsi.ru , studentpmm@gmail.com

Аннотация. Для образа преобразования Радона-Киприянова введены весовые нормы функций определенных на бесконечном полуцилиндре. Доказано, что эти нормы эквивалентны нормам функций в пространстве Соболева-Киприянова.

Ключевые слова: Преобразование Радона-Киприянова, пространство Соболева-Киприянова.

Как известно, преобразование Радона, будучи интегральным преобразованием, улучшает свойства гладкости функции, и это преобразование, рассматриваемое как оператор в L_2, является непрерывным. Но так же известно, что в пространстве L_2 соответствующий обратный оператор не является непрерывным. Поэтому исследование задач компьютерной томографии на основе формул обращения преобразования Радона вынуждает использовать другие функциональные классы. В работах [1] и [2] (в [2] для функций, определенных в R_2) выяснилось, что к таким классам можно отнести пространство функций, определенных на цилиндре с нормой, согласованной с обычной нормой пространства Соболева H^s. Этот класс функций оказался в соответствующем смысле эквивалентным обычному классу Соболева и оказался очень удобным в практических задачах компьютерной томографии (см. книгу Ф. Наттерера [3]).

В [4] введено специальное преобразование Радона[1], приспособленное для работы с весовыми классами функций И.А.Киприянова и соответствующими сингулярными дифференциальными операторами. В данной работе, следуя [1] и [3], вводится весовой функциональный класс на полуцилиндре и приводятся оценки введенной в этом функциональном пространстве нормы преобразования Радона-Киприянова четных гладких функций с ограниченным носителем. Эти нормы выражаются через нормы весового класса Соболева-Киприянова H^s_γ (см. [5], [6]).

Пусть R_n=$\{x = (x_1, \ldots, x_n)\}$ – евклидово пространство точек, а R^+_n – полупространство определенное неравенством $x_1 > 0$, и пусть $\varnothing^+$ – ограниченная область в R^+_n, прилегающая к гиперплоскости $x_1 = 0$. Скалярное произведение n-мерных векторов обозначим $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Уравнение произвольной гиперплоскости в R_n, ортогональной

[1]Впоследствии это преобразование стало называться преобразованием Радона-Киприянова. Именно это преобразование изучается в этой статье.

вектору ξ, задается уравнением $\langle \xi, x\rangle = p$. Если $|\xi|=1$, а $p>0$, то уравнение плоскости называется *нормальным*.

Через $C^\infty_{0,ev}(\varnothing^+)$ будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых функций с носителем в $\varnothing^+$, четное, продолжение которых по переменной x_1 является бесконечно дифференцируемой функцией в R_n.

Для произвольной локально интегрируемой в R_n^+ функции четной по переменной x_1 через $\Pi^\gamma_{x_1} f(x)$ будем обозначать действие на эту функцию оператора Пуассона по переменной $x_1 \in R_1^+$ по формуле

$$\Pi^\gamma_{x_1} g(x) = \Pi^\gamma_{x_1} g(x_1, x') = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^\pi g(x_1\cos\alpha,\, x')\ \sin^{\gamma-1}\alpha\, d\alpha\,.$$

Здесь и всюду далее предполагается, что γ фиксированное положительное число.

Пусть функция f четная по x_1 абсолютно интегрируемая по R_n^+ с весом x_1^γ. Преобразование Радона-Киприянова функции f введено в работе [4] и имеет вид

$$K_\gamma[f](\xi;p) = \int_{R_n^+} f(x)\, \Pi^\gamma_{x_1}\delta(p - \langle x, \xi\rangle)\, x_1^\gamma\, dx\,,$$

где $\langle \xi, x\rangle - p = 0$ – нормальное уравнение плоскости с единичным вектором нормали ξ, проходящей на расстоянии p от начала координат, $\delta(P)$ – обычная[2] δ-функция, сосредоточенная на поверхности $P=0$. Как видим, функция $K_\gamma[f](\xi;p)$ определена на полуцилиндре

$$(\xi;p) \in Z = S_1^+(n) \times R_1\,,$$

где $S_1^+(n) = \{\xi : |\xi| = 1,\ \xi_1 > 0\}$ – единичная полусфера с центром в начале координат, принадлежащая полупространству R_n^+. Размерность цилиндра Z равна n. Отметим, что преобразование K_γ создано для работы с сингулярными дифференциальными операторами типа оператора Бесселя. Для той же цели в [5], [6] введены весовые функциональные классы функций Соболева-Киприянова $W^\ell_{p,\gamma}$ и, в частности, функциональный класс H^l_γ. В связи с этим возникает задача введения нормы для функций, определенных в цилиндре Z так, чтобы она оказалась согласованной с нормой пространства Соболева-Киприянова H^l_γ. В данной работе решается именно эта задача в случае, когда носитель функции f ограничен в полупространстве R_n^+. Следуя [1], [3], введем следующим образом подобие весовых киприяновских классов функций $g = g(\xi, p)$, заданных на цилиндре Z. Функция $g(\xi,p) \in H^s_\gamma(Z)$, если

$$\|g\|^2_{H^s_\gamma(Z)} = \int_{S_1^+} \xi_1^\gamma \int_{R_1} (1+\sigma^2)^s\, |F_{p\to\sigma}[g](\xi;\sigma)|^2\, d\sigma\ dS(\xi) < \infty\,, \tag{1}$$

[2]В теории весовых обобщенных функций построенной на основе весового скалярного произведения (см. [6]) используется специальный класс δ-функций. В определении же преобразование Радона-Киприянова использована δ-функция с носителем на поверхности в R_n, теория описана в книге [7], гл. III, §1.

где через F обозначено преобразование Фурье функций, действующее только по переменной p:

$$F_{p\to\sigma}[g](\xi;\sigma)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi;p)e^{-ip\sigma}dp\,.$$

Пусть j_ν – j-функция Бесселя, связанная с функцией Бесселя первого рода J_ν формулой (см. [5], [6])

$$j_\nu(t)=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{t^\nu}J_\nu(t)\,.$$

Смешанное интегральное преобразование Фурье-Бесселя функций, четных по переменной x_1 и интегрируемых по R_n^+, определяется по формуле (см. [6])

$$F_B[f](\eta)=\int\limits_{R_n^+} f(x)\ j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1)\ e^{-i\langle x,\eta\rangle}\ x_1^\gamma\ dx\,.$$

Множество функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_p^\gamma}=\left(\int |f(x)|^p\,x_1^\gamma\,dx\right)^{1/p}\qquad (p\geq 1)\,,$$

обозначим $L_p^\gamma(R_n^+)$.

Для функций f и g, принадлежащих $L_2^\gamma(R_n^+)$, справедлива формула Планшереля, выражающая инвариантность весового скалярного произведения

$$(f,g)_\gamma=\int f(x)\,g(x)\,x_1^\gamma\,dx$$

при преобразовании Фурье-Бесселя:

$$\int\limits_{R_n^+} F_B[f](\xi)\ \overline{F_B[g](\xi)}\,\xi_1^\gamma\,d\xi=\int\limits_{R_n^+} f(x)\ \overline{g(x)}\,x_1^\gamma\,dx\,.$$

Классический класс функций Соболева-Киприянова определяется с помощью смешанного интегрального преобразования Фурье-Бесселя (см. [6]) и представляет собой множество функций, для которых конечна норма

$$\|f(x)\|^2_{H_\gamma^s(R_n)}=\int_{R_n^+}(1+|\eta|^2)^s|F_B[f](\eta)|^2\eta_1^\gamma d\eta\,.$$

Теорема. *Для всякого s существуют такие положительные константы $c(s,n,\gamma)$, $C(s,n,\gamma)$, что для $f\in C^\infty_{0,ev}(\Omega^+)$*

$$c(\alpha,n,\gamma)\|f\|_{H_\gamma^s(\Omega^+)}\leq\|K_\gamma[f]\|_{H_\gamma^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}}(Z)\leqslant C(s,n,\gamma)\|f\|_{H_\gamma^s(\Omega^n)}\,. \qquad (2)$$

□. Мы исходим из связи преобразований Фурье, Фурье-Бесселя и Радона, полученной в работе [1], которая заключается в следующем равенстве

$$F_B[f](\eta) = F_B[f](\sigma\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\xi;p)\; e^{-i\sigma p}\; dp = F_{p\to\sigma}[K_\gamma[f]](\sigma\xi)\,. \tag{3}$$

Здесь $\sigma \in R_1$, а ξ, вообще говоря, произвольная точка замкнутого полупространства $\overline{R_n^+}$, но далее нам удобно считать её принадлежащей единичной полусфере $\overline{S_n^+}$, поскольку именно так эта переменная используется в определении нормы (1).

Согласно (1) и (3), имеем

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H^{s+(n+\gamma-1)/2}(Z)} =$$

$$= \int\limits_{S_1^+(n)} \xi_1^\gamma \int\limits_{R^1} (1+\sigma^2)^{s+(n+\gamma-1)/2} |F_{p\to\sigma}[K_\gamma[f]](\sigma\,\xi)|^2 d\sigma\, dS(\xi) =$$

$$= \int\limits_{S_1^+(n)} \xi_1^\gamma \int\limits_{R^1} (1+\sigma^2)^{s+(n+\gamma-1)/2}\, |F_B[f](\sigma\,\xi)|^2\, d\sigma\, dS(\xi)\,.$$

Учитывая четность функции $F_B[f](\eta)$ по переменной $\eta_1 = \sigma\,\xi_1$, последнее выражение можно переписать в виде интеграла по полной сфере и тогда

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H^{\alpha+(n+\gamma-1)/2}(Z)} =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{S_1(n)} |\xi_1|^\gamma \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\sigma^2)^{\alpha+(n+\gamma-1)/2} |F_B[f](\sigma\xi)|^2\, d\sigma\, dS(\xi)\ . \tag{4}$$

Интеграл по переменной σ представим в виде суммы двух интегралов по полуосям $(-\infty, 0]$ и $[0, +\infty)$. В первом из них сделаем замену $\sigma = -\sigma_1$. Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{0} (1+\sigma^2)^{s+(n+\gamma-1)/2} |F_B[f](\sigma\xi)|^2 d\sigma =$$

$$= -\int\limits_{+\infty}^{0} (1+\sigma_1^2)^{s+(n+\gamma-1)/2} |F_B[f](-\sigma_1\xi)|^2 d\sigma_1 =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} (1+\sigma^2)^{s+(n+\gamma-1)/2} |F_B[f](-\sigma\xi)|^2 d\sigma\ .$$

Теперь учтем, что интеграл по сфере не изменится, если заменить ξ на $-\xi$ $(|\xi_1|=1)$. Тогда равенство (4) примет вид

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}(Z)}=\int\limits_{S_1(n)}|\xi_1|^\gamma\int\limits_{R_1^+}(1+\sigma^2)^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}|F_B[f](\sigma\xi)|^2d\sigma\,dS(\xi)=$$

$$=\int\limits_{S_1^+(n)}\xi_1^\gamma\int\limits_{R_1^+}(1+\sigma^2)^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}|F_B[f](\sigma\xi)|^2d\sigma\,dS(\xi)\;.$$

Здесь уже $\sigma>0$, и поэтому эта величина может играть роль радиуса сферических координат в R_n^+. Предполагая, что в последнем выражении σ и ξ — сферические координаты точки $\eta\in\overline{R_n^+}$, т.е. $\eta=\sigma\,\xi,\ \eta_1\geq0,\ |\eta|=\sigma,\ |\xi|=1$, перейдем к декартовым координатам в R_n. При этом

$$d\eta=\sigma^{n-1}\,d\sigma\,dS(\xi)\ \Rightarrow\ d\sigma dS(\xi)=\sigma^{1-n}d\eta=|\eta|^{1-n}d\eta\ ,$$
$$\sigma^{1-n}\,\xi_1^\gamma=(\sigma\xi_1)^\gamma\,\sigma^{1-\gamma-n}=\eta_1^\gamma\,|\eta|^{1-\gamma-n}\,.$$

Отсюда

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}(Z)}=$$
$$=\qquad 2\int\limits_{R_n^+}\eta_1^\gamma|\eta|^{1-n-\gamma}(1+|\eta|^2)^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}|F_B[f](\eta)|^2\,d\eta\,. \tag{5}$$

Теперь учтем, что в наших рассуждениях[3] $n\geq1,\ \gamma>0$. Поэтому

$$|\eta|\leqslant(1+|\eta|^2)^{1/2}\ \Longrightarrow\ |\eta|^{1-n-\gamma}\geq(1+|\eta|^2)^{\frac{-n+\gamma-1}{2}}\ .$$

Следовательно

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}(Z)}\geq2\int\limits_{R_n^+}(1+|\eta|^2)^s|F_B[f](\eta)|^2\,\eta_1^\gamma\,d\eta=2\|f\|_{H_\gamma^s}\ .$$

Это и есть левое неравенство утверждения (2).

Для того, чтобы получить правое неравенство в (2), представим интеграл в правой части равенства (5) в виде суммы интеграла по области $\Omega_1^+=\{|\eta|\leqslant1\}^+=\{|\eta|\leqslant 1,\ \eta_1>0\}$ и интеграла по области $\Omega_2^+=\{|\eta|\geq1\}^+=\{|\eta|\geq1,\ \eta_1>0\}$.

В области Ω_2^+, очевидно, выполняется неравенство $2|\eta|^2\geq(1+|\eta|^2)$, поэтому $\eta|^2\geq2^{-1}(1+|\eta|^2)$. Следовательно,

$$\int\limits_{\{|\eta|\geq1\}^+}|\eta|^{1-n-\gamma}(1+|\eta|^2)^{s+(n+\gamma-1)/2}|F_B[f](\eta)|^2\eta_1^\gamma d\eta\leq$$

[3] Интересно отметить, что в классических исследованиях обычно необходимо, чтобы $n\geq2$, так как преобразование Радона не определено в R_1. Напротив, преобразование Радона-Киприянова в R_1 определено.

$$\leq 2^{(n-1+\gamma)/2} \int\limits_{\{|\eta|\geq 1\}^+} (1+|\eta|^2)^s |F_B[f](\eta)|^2 \eta_1^\gamma d\eta \leqslant$$

$$\leq 2^{(n-1+\gamma)/2} \|f\|^2_{H^s_\gamma(\Omega^n)} \;. \tag{6}$$

Теперь перейдем к оценке этого же интеграла в области

$$\Omega_1^+ = \{|\eta| \leqslant 1\}^+ = \{|\eta| \leqslant 1,\ \eta_1 > 0\}.$$

В этой области функция $|\eta|^{1-n-\gamma}(1+|\eta|^2)^{s+(n+\gamma-1)/2}\,\eta_1^\gamma$ имеет особенность (только в начале координат, поскольку область ограничена). Но переходя к сферическим координатам в интеграле по $\{|\eta| \leqslant 1\}^+$ от этой функции, легко установить его сходимость. Введем обозначение

$$\int\limits_{\Omega_1^+} |\eta|^{1-n-\gamma}(1+|\eta|^2)^{s+(n+\gamma-1)/2}\,\eta_1^\gamma d\eta = c_1(s,n,\gamma)\ .$$

Имеем

$$\int\limits_{\Omega_1^+} |\eta|^{1-n-\gamma}(1+|\eta|^2)^{s+(n+\gamma-1)/2} |F_B[f](\eta)|^2 \eta_1^\gamma d\eta \leqslant$$

$$\leqslant c_1(s,n,\gamma)\ \sup_{\overline{\Omega_1^+}} |F_B[f](|\eta)|^2\ . \tag{7}$$

Для доказательства теоремы остается оценить величину

$$\sup_{\overline{\varnothing_1^+} = |\eta|\leq 1,\, \eta_1\geq 0} |F_B[f](\eta)|^2$$

через норму функции f в пространстве Соболева-Киприянова H^s_γ.

Пусть функция $\chi \in C^\infty_{0,ev}(R^n)$ и равна 1 на носителе $\operatorname{supp} f = \Omega^+ \in R_n^+$. Положим

$$\chi_\eta(x) = e^{-i\langle x',\eta'\rangle} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1)\ \chi(x).$$

Тогда

$$F_B[f](\eta) = \int\limits_{R_n^+} f(x)\ j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1)\ e^{-i\langle x,\eta\rangle}\ x_1^\gamma\ dx = \int\limits_{R_n^+} f(x)\ \chi_\eta(x)\ x_1^\gamma\ dx\,.$$

По условию теоремы функция f принадлежат весовому пространству Лебега $L_p^\gamma(R_n^+)$ $(p \geq 1)$, но то же самое можно сказать про функцию χ_η, поскольку она представляет собой произведение бесконечно дифференцируемых функций, одна из которых имеет ограниченный носитель. Поэтому к весовому интегралу от произведения функций, каждая из которых принадлежит L_2^γ, можно применить формулу Планшереля для смешанного преобразования Фурье-Бесселя. В результате получим равенство

$$F_B[f](\eta) = \int\limits_{R_n^+} \chi_\eta(x) f(x) x_1^\gamma dx = \int\limits_{R^n} F_B[\chi_\eta](\xi) F_B[f](\xi)\xi_1^\gamma d\xi =$$

$$= \int\limits_{R_n^+} F_B[\chi_\eta](\xi)\,(1+|\xi)|^2)^{-s/2}(1+|\xi)|^2)^{s/2} F_B[f](\xi)\xi_1^\gamma d\xi\,.$$

К этому выражению применим неравенство Коши-Буняковского, тогда

$$|F_B[f](\eta)]| \leqslant \left(\int\limits_{R_n^+} (1+|\xi|^2)^{-s} |F_B[\chi_\eta](\xi)|^2\,\xi_1^\gamma\,d\xi\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{R_n^+} (1+|\xi|^2)^{s} |F_B[f](\xi)|^2\,\xi_1^\gamma\,d\xi\right)^{1/2} = \|\chi_\eta\|_{H_\gamma^{-s}(R_n^+)} \|f\|_{H_\gamma^s(\Omega^+)}\ .$$

Рассмотрим первый из этих интегралов. Функция $F_B[\chi_\eta]$ имеет следующий вид

$$F_B[\chi_\eta](\xi) = \int\limits_{R^n} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1) j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\xi_1) e^{-i\langle x',\,\eta'\rangle} e^{-i\langle x',\,\xi'\rangle} \chi(x) x_1^\gamma dx\ .$$

Теорема сложения для j-функций Бесселя утверждает, что (см. книгу [6]) $j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1)j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\xi_1) = T_\xi^\eta j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x\xi)$, где через $T_{\eta_1}^{\xi_1}$ обозначен обобщенный сдвиг, действие которого по переменной x_1 определяется по формуле

$$f \to T_{x_1}^{y_1} f(x_1,x') =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\,\Gamma(1/2)} \int\limits_0^\pi f(\sqrt{x_1^2+y_1^2-2x_1y_1\cos\alpha},\,x')\,\sin^{\gamma-1}\alpha\,d\alpha\,.$$

Таким образом,

$$F_B[\chi_\eta](\xi) = \int\limits_{R^n} T_{\eta_1}^{\xi_1} j_{\frac{\gamma-1}{2}}(x_1\eta_1) e^{-i\langle x',\,\eta'+\xi'\rangle} \chi(x) x_1^\gamma dx =$$

$$= T_{\eta_1}^{\xi_1}\widetilde{\chi}(\eta_1,\eta'+\xi') = (T^\eta\widetilde{\chi})(\xi)\ .$$

Здесь через $\widetilde{\chi}$ обозначено действие смешанного преобразования Фурье-Бесселя на функцию χ, а оператор T^η – смешанный обобщенный сдвиг (по первой переменной действует обобщенный сдвиг, а по оставшимся – обычный).

Поскольку функция χ четная по x_1, бесконечно дифференцируема и имеет ограниченный носитель, то ее преобразование Фурье-Бесселя принадлежит подпространству $S_{ev}(R_n^+)$ пространства Шварца основных функций $S(R_n)$, убывающих быстрее любой степени модуля переменной. Учитем, что обобщенный сдвиг, представляя собой интегральный оператор, является сглаживающим. Поэтому в равенстве

$$\|\chi_\eta\|^2_{H_\gamma^{-s}(R_n^+)} = \int\limits_{R^n} |T^\eta\hat{\chi}(\xi)|^2\ (1+|\xi|^2)^{-s}\ \xi_1^\gamma\ d\xi\,.$$

функция $T^\eta\hat{\chi} \in S_{ev}$, но при этом функция $(1+|\xi|^2)^{-s}$ при любом действительном s представляет собой мультипликатор пространства S_{ev}. Следовательно, существует и конечен

$$\sup_{\eta\in\overline{\varnothing_1^+}} \|T^\eta\chi\|_{H_\gamma^{-s}} = c_2(s,n,\gamma)\,. \tag{8}$$

Из (6), использую (7) и (8), получим

$$\|K_\gamma[f]\|^2_{H_\gamma^{s+(n+\gamma-1)/2}(Z)} \leq (2^{(n+\gamma-1)/2} + c_1(s,n,\gamma)\,c_2^2(s,n,\gamma)\|f\|^2_{H_\gamma^s(\Omega^+)}\,.$$

Это и есть правое неравенство для K_γ. ■

Отметим, что для целых $s \geq 0$ норма

$$\|f(x)\|^2_{H_\gamma^s(R_n)} = \int_{R_n^+}(1+|\eta|^2)^s|F_B[f](\eta)|^2\eta_1^\gamma d\eta\,.$$

эквивалентна следующей

$$\|f(x)\|^2_{\tilde{H}_\gamma^s(R_n)} = \int\limits_{R_n^+}\sum_{2l_1+|l'|\leqslant s}(B_{x_1}^{l_1}D_{x'}^{l'}f)(x)x_1^\gamma dx\,,$$

где $B_{x_1} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\gamma}{x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ – сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, $D_{x'}^{l'} = \left(\dfrac{\partial^{l_2}}{\partial x_2^{l_2}},\ldots,\dfrac{\partial^{l_n}}{\partial x_n^{l_n}}\right)$, $l' = (l_2,\ldots,l_n)$, $|l'| = l_2+\ldots+l_n$.

Если учесть, что при целых s $\sigma^s F[g](\sigma,\theta) = F[D_p^s g(p,\theta)](\sigma,\theta)$, то норма $\|\cdot\|_{H_\gamma^s(Z)}$ функций, определенных на полуцилиндре, эквивалентна норме

$$\|g\|^2_{\tilde{H}^s\gamma} = \int\limits_{S_1^+(n)}\theta_1^\gamma\int\limits_{R_1}\sum_{l\leqslant s}|D_p^l g(o,\theta)|^2\,dp\,.$$

Таким образом, для целых значений $s \geq 0$, как следствие доказанной теоремы, мы получим неравенства

$$c\|f\|_{\tilde{H}_\gamma^s(\Omega^+)} \leq \|K_\gamma[f]\|_{\tilde{H}_\gamma^{s+\frac{n+\gamma-1}{2}}(Z)} \leqslant C\|f\|_{\tilde{H}_\gamma^s(\Omega^n)}\,.$$

Интересно, что здесь в средней части находятся весовые L_2^γ-нормы обычных производных, а крайние члены неравенства содержат весовые L_2^γ-нормы сингулярных B-производных. С другой стороны, это и не удивительно, поскольку известно ([8]), что смешанные производные типа $B_{x_1}^{l_1}D_{x'}^{l'}g(x)$ при $s = 2l_1+|l'|$ связаны соотношением $\xi_1^{2l_1}(\xi')^{l'}D_p^sK_\gamma(p;\xi) = K_\gamma[B_{x_1}^{l_1}D_{x'}^{l'}g(x)](p;\xi)$.

Литература

1. Smith K.T. Practical and mathematical aspects of the problem of the reconstructing a function from radiographs // Bull. AMS. – 1977. – 83. – P.1227-1270.

2. Natterer F. A Sobolev space analysis of picture reconstruction // SIAM J. Appl. Math. – 39 – P.402-411.

3. Наттерер, Ф. Математические аспекты компьютерной томографии / Ф. Наттерер. – М.: Мир, 1990. – 280 с.

4. Киприянов И.А., Ляхов Л.Н. О преобразованиях Фурье, Фурье-Бесселя и Радона // ДАН. – 1998. – 360;2. – С.157-160.

5. Киприянов, И.А. Преобразование Фурье-Бесселя и теоремы вложения для весовых классов // Тр. МИРАН. – 1967. – 89. – С. 130-213.

6. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И.А. Киприянов. – М.: Наука, 1997. – 200 с.

7. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 470 с.

8. Ляхов, Л.Н. Преобразование Киприянова-Радона // Тр. МИРАН. – 2005. – 248. – С.153-163.

WEIGHT ESTIMATES FOR TRANSFORMATION OF RADON-KIPRIYANOV's FUNCTIONS WITH BOUNDED SUPPORT

L.N Lyakhov, O.I. Popova

Voronezh State University,
Universitetskaya Sq., 1, Voronezh, 394006, Russia,
e-mail: lyakhov@box.vsi.ru , studentpmm@gmail.com

Abstract. For the image of Radon-Kipriyanov's transformation are introduced weight norms of functions defined on infinite half-cylinder. It is proved that these norms are equivalent to norms in Sobolev-Kipriyanov's space.

Key words: Radon-Kipriyanov's transformation, Sobolev-Kipriyanov's space.

УДК 519 + 535 + 538

ТАБЛИЦА КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ОПРЕДЕЛЁННЫХ НА КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА

А.С. Мазманишвили

Сумской государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2, Сумы, Украина, e-mail:mazmanishvili@gmail.com

Аннотация. Представлена таблица из более 140 континуальных интегралов, определенных на стохастическом комплекснозначном скалярном случайном процессе Орнштейна-Уленбека. По своему содержанию все они являются интегралами от соответствующих гауссовых форм. Это позволило в аналитической форме привести континуальные интегралы к виду, не содержащему усреднение по траекториям нормального марковского комплекснозначного процесса Орнштейна-Уленбека. Значения рассмотренных континуальных интегралов, могут быть полезными при решении разнообразных прикладных статистических задач.

Ключевые слова: интегралы по траекториям, случайный процесс Орнштейна-Уленбека, гауссовские формы.

В представленной таблице континуальных интегралов от гауссовых форм результат интегрирования везде приведен к форме, не содержащей усреднения по траекториям нормального марковского комплекснозначного процесса Орнштейна-Уленбека.

Последовательность континуальных интегралов даётся, начиная с достаточно простых и известных, и далее по возрастающей сложности.

Используются следующие обозначения:

$z(\tau)$ – решение стохастического уравнения

$$dz(\tau) = -\nu z(\tau)\, d\tau + du(\tau), \qquad z(0) = z_0;$$

z_0 – значение процесса $z(\tau)$ в начальный момент времени $\tau = 0$;

z_t – значение процесса $z(\tau)$ в конечный момент времени $\tau = t$;

ν – декремент случайного процесса $z(\tau)$ Орнштейна-Уленбека;

$u(\tau)$ – порождающий обобщённый случайный процесс "белого шума"с коррелятором $\langle u(\tau_1)u(\tau_2)\rangle = \sigma_u\,\delta(\tau_1-\tau_2)$;

λ – вещественный параметр;

$\sigma = \sigma_u/\nu$ – интенсивность случайного процесса $z(\tau)$;

$r = \sqrt{\nu^2+2\lambda\nu\sigma}$;

$r_+ = r+\nu; \qquad r_- = r-\nu;$

$$Q(\lambda) = \frac{4r\nu\exp(\nu t)}{(r+\nu)^2\exp(rt)-(r-\nu)^2\exp(-rt)};$$

$q \;=\; \exp(-rt)$;

$\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ – произвольные локально квадратично интегрируемые функции;

$V(z(\tau))$ – произвольный функционал от процесса $z(\tau)$;

Мы обозначаем угловыми скобками интеграл по распределению вероятностей комплекснозначного процесса Орнштейна-Уленбека. В частности, $\langle z_0|V(z(\tau))|z_t\rangle$ – условное (относительно состояний z_0 и z_t) математическое ожидание функционала $V(z(\tau))$, после результатом его интегрирования по всем возможным значениям z_0 и z_t является безусловное математическое ожидание по мере процесса Орнштейна-Уленбека.

Интегрирование по всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ осуществляется на основе интегрирования по вещественным переменных $\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$, $z \in \mathbb{C}$ в бесконечных пределах. При этом мера, по которой производится интегрирование, обозначается как $d^2 z$.

1.

$$\langle z_\tau|1|z_t\rangle \;\equiv\; w\,(z_t, t; z_\tau, \tau) \;=\; \frac{1}{\pi\sigma\,\left(1\,-q^2\right)} \exp\left\{-\frac{\left|z_t\,-q z_\tau\right|^2}{\sigma\,\left(1\,-q^2\right)}\right\},$$

где $t > \tau, \quad q = \exp[-\nu(t-\tau)]$.

2.

$$\lim_{\tau\to-\infty}\langle z_\tau|1|z_t\rangle \;\equiv\; w(z_t) \;=\; \exp\left(-\frac{|z_t|^2}{\sigma}\right).$$

3.

$$\langle z_0|z_0|z_t\rangle \;=\; z_0 w\,(z_t, t; z_0, 0).$$

4.

$$\langle z_0|z_t|z_t\rangle \;=\; z_t w\,(z_t, t; z_0, 0).$$

5.

$$\langle z_0|z(\tau)|z_t\rangle \;=\; (1-q^2)^{-1}\,\left[q_1\,(1-q_2^2)\,z_0 + q_2\,(1-q_1^2)\,z_t\right] w\,(z_t, t; z_0, 0),$$

где $0 \le \tau \le t, \quad q = \exp(-\nu t), \quad q_1 = \exp(-\nu\tau), \quad q_2 = \exp(-\nu t + \nu\tau)$.

6.

$$\langle z_0|V(z(\tau))|z_t\rangle \;=\; w\,(z_t, t; z_0, 0)\,\frac{1-q^2}{\pi\sigma\,\left(1-q_1^2\right)\left(1-q_2^2\right)}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_\tau V(z_\tau)\exp\left\{-\frac{\left|z_\tau - q_1\,(1-q_2^2)\,z_0 - q_2\,(1-q_1^2)\,z_t\right|^2}{\sigma\,(1-q^2)\,(1-q_1^2)\,(1-q_2^2)}\right\},$$

где $0 \le \tau \le t, \quad q_1 = \exp(-\nu\tau), \quad q_2 = \exp(-\nu t + \nu\tau)$.

7.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t\, w(z_t)\langle z_0|1|z_t\rangle \;=\; 1.$$

8.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t\, w(z_0)\langle z_0|1|z_t\rangle \;=\; w(z_t).$$

9.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t\langle z_0|z_0|z_t\rangle \;=\; z_0.$$

10.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t\langle z_0|z_t|z_t\rangle \;=\; z_0\exp(-\nu t).$$

11.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t\langle z_0|z(\tau)|z_t\rangle \;=\; z_0\exp(-\nu\tau),$$

где $0 \le \tau \le t$.

12.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t\langle z_0|\beta(z_0)|z_t\rangle \;=\; \beta(z_0).$$

13.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0)\langle z_t|z_0|z_t\rangle \;=\; z_t\exp(-\nu t)w(z_t).$$

14.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0)\langle z_0|z_t|z_t\rangle \;=\; z_t w(z_t).$$

15.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0)\langle z_0|z(\tau)|z_t\rangle \;=\; z_t\exp(-\nu\tau)w(z_t),$$

где $0 \le \tau \le t$.

16.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0)\langle z_0|\beta(z_t)|z_t\rangle \;=\; \beta(z_t)w(z_t).$$

17.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\, V(z(\tau))\,|z_t\rangle \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_\tau\, V(z_\tau)w(z_\tau,\tau;z_0,0),$$

где $0\le\tau\le t$.

18.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0)\langle z_0|\beta(z(\tau))|z_t\rangle \;=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_\tau\beta\,(z_\tau)\, w\,(z_t,t;z_\tau,\tau),$$

где $0\le\tau\le t$.

19.

$$\langle z_0|z_0z_0^*|z_t\rangle \;=\; |z_0|^2w\,(z_t,t;z_0,0).$$

20.

$$\langle z_0|z_tz_t^*|z_t\rangle \;=\; |z_t|^2w\,(z_t,t;z_0,0).$$

21.

$$\langle z_0|z(\tau)z^*(\tau)|z_t\rangle \;=\; [(1-\exp(-2\nu t)]^{-2}w\,(z_t,t;z_0,0)\times$$

$$\times\left[\sigma\,(1-q_1^2)\,(1-q_2^2)\,[1-\exp(-2\nu t)]+|q_1\,(1-q_2^2)\,z_0+q_2\,(1-q_1^2)\,z_t\,|^2\right],$$

где $0\le\tau\le t,\quad q_1=\exp(-\nu\tau),\qquad q_2=\exp(-\nu t+\nu\tau).$

22.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|z_0z_0^*|z_t\rangle \;=\; |z_0|^2.$$

23.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0)\langle z|z_0z_0^*|z_t\rangle \;=\; \left[\sigma(1-\mathrm{e}^{-2\nu t})+|z_t|^2\mathrm{e}^{-2\nu t}\right]w(z_t).$$

24.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|z_tz_t^*|z_t\rangle \;=\; \sigma\,(1-\mathrm{e}^{-2\nu t})+|z_0|^2\mathrm{e}^{-2\nu t}.$$

25.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0)\langle z_0|z_tz_t^*|z_\tau\rangle \;=\; |z_t|^2w(z_t).$$

26.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z(\tau) z^*(\tau) | z_t \rangle \;=\; \sigma \left(1 - \mathrm{e}^{-2\nu\tau}\right) + |z_0|^2 \mathrm{e}^{-2\nu\tau},$$

где $0 \le \tau \le t$.

27.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \langle z_0 | z(\tau) z^*(\tau) | z_t \rangle \;=\; w(z_t) \left[\sigma \left(1 + \mathrm{e}^{-2\nu(t-\tau)}\right) + |z_t|^2 \mathrm{e}^{-2\nu(t-\tau)} \right],$$

где $0 \le \tau \le t$.

28.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z_0 | z_t \rangle \;=\; 0.$$

29.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z_t | z_t \rangle \;=\; 0.$$

30.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z(\tau) | z_t \rangle \;=\; 0,$$

где $0 \le \tau \le t$.

31.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z_0 z_0^* | z_t \rangle \;=\; \sigma.$$

32.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z_t z_t^* | z_t \rangle \;=\; \sigma.$$

33.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z(\tau) z^*(\tau) | z_t \rangle \;=\; \sigma,$$

где $0 \le \tau \le t$.

34.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \langle z_0 | z_0^2 z_0^* | z_t \rangle \;=\; 0.$$

35.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|z_t^2 z_t^*|z_t\rangle \;=\; 0.$$

36.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|z^2(\tau) z^*(\tau)|z_t\rangle \;=\; 0,$$

где $0 \le \tau \le t$.

37.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|z_0^2 (z_0^*)^2|z_t\rangle \;=\; 2\sigma^2.$$

38.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|z_t^2 (z_0^*)^2|z_t\rangle \;=\; 2\sigma^2.$$

39.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|z^2(\tau) (z^*(\tau))^2|z_t\rangle \;=\; 2\sigma^2,$$

где $0 \le \tau \le t$.

40.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|z_0^m (z_0^*)^n|z_t\rangle \;=\; \delta_{mn} n!\, \sigma^n.$$

41.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|z_t^m (z_t^*)^n|z_t\rangle \;=\; \delta_{mn} n!\, \sigma^n.$$

42.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|z^m(\tau) (z_t^*(\tau))^n|z_t\rangle \;=\; \delta_{mn} n!\, \sigma^n,$$

где $0 \le \tau \le t$.

43.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{N\tau} \langle z_0|\sum_{n=0}^{N} |z(n\tau)|^2|z_{N\tau}\rangle \;=\; (N+1)\sigma.$$

44.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{N\tau} \langle z_0|\left|\sum_{n=0}^{N} z(n\tau)\right|^2|z_{N\tau}\rangle \;=\; \sigma\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} \exp(-\nu|n-m|).$$

45.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{N\tau} \langle z_0| \sum_{n=0}^{N} |z(n\tau) + \beta(n\tau)|^2 |z_{N\tau}\rangle \ =$$

$$= \ (N+1)\,\sigma + \sum_{n=0}^{N} |\beta(n\tau)|^2.$$

46.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{N\tau} \langle z_0| \left| \sum_{n=0}^{N} z(n\tau) + \beta(n\tau) \right|^2 |z_{N\tau}\rangle \ =$$

$$= \ \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} [\sigma \exp(-\nu|n-m|) + \beta(n\tau)\beta^*(m\tau)].$$

47.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{N\tau} \langle z_0| \left[\sum_{n=0}^{N} |z(n\tau)|^2 \right]^2 |z_{N\tau}\rangle \ =$$

$$= \ \sigma^2 \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=n}^{N} [1 + \exp(-2\nu\tau|m-n|)].$$

48.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{N\tau} \langle z_0| \left[\sum_{n=0}^{N} |z(n\tau) + \beta(n\tau)|^2 \right]^2 |z_{N\tau}\rangle \ =$$

$$= \ \sigma^2 \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=n}^{N} [1 + \exp(-2\nu\tau|m-n|)] + 2\sigma(N+1) \sum_{n=0}^{N} |\beta(n\tau)|^2 +$$

$$+ \ 2\sigma \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \beta(n\tau)\beta^*(n\tau) + \left[\sum_{n=0}^{N} |\beta(n\tau)|^2 \right]^2.$$

49.

$$\langle z_0|\beta(z_\tau)|z_t\rangle \ =$$

$$= \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_\tau \langle z_0|\beta(z_\tau)|z_\tau\rangle\langle z_\tau|1|z_t\rangle \ = \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_\tau \langle z_0|1|z_\tau\rangle\langle z_\tau|\beta(z_\tau)|z_t\rangle,$$

где $0 \le \tau \le t$, $\beta(z)$ – произвольная локально интегрируемая функция.

50.

$$\langle z_0| \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau |z_t\rangle \ = \ \nu^{-1}(z_0 + z_t) w\,(z_t, t; z_0, 0).$$

51.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \langle z_0| \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau |z_t\rangle \;=\; \nu^{-1} z_t w(z_t).$$

52.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0| \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau |z_t\rangle \;=\; \nu^{-1} z_0 \left[1 - \exp(-\nu t)\right].$$

53.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0| \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau |z_t\rangle \;=\; 0.$$

54.

$$\langle z_0| \int\limits_0^t \beta(\tau) z(\tau)\, d\tau |z_t\rangle \;=$$

$$=\; \left(1 - \mathrm{e}^{-2\nu t}\right)^{-1} w\left(z_t, t; z_0, 0\right) \times$$

$$\times \int\limits_0^t \beta(\tau) \left[z_0 \left(\mathrm{e}^{-\nu\tau} - \mathrm{e}^{\nu(2t-\tau)} \right) + z_t \left(\mathrm{e}^{-\nu(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-\nu(t+\tau)} \right) \right] d\tau.$$

55.

$$\langle z_0| \int\limits_0^t \beta(\tau) z(\tau)\, d\tau |z_t\rangle \;=\; z_t w\left(z_t\right) \int\limits_0^t \beta(\tau) \mathrm{e}^{-\nu(t-\tau)}\, d\tau.$$

56.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0| \int\limits_0^t \beta(\tau) z(\tau)\, d\tau |z_t\rangle \;=\; z_0 \int\limits_0^t \beta(\tau) \mathrm{e}^{-\nu\tau}\, d\tau.$$

57.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0| \beta(\tau) z(\tau) |z_t\rangle \;=\; 0.$$

58.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0| z_t^* \int\limits_0^t \beta(\tau) z(\tau)\, d\tau |z_t\rangle \;=\; \sigma \int\limits_0^t \beta(\tau) \mathrm{e}^{-\nu(t-\tau)}\, d\tau.$$

59.

$$\langle z_0| \beta_1(z(\tau)) \beta_2(z(\tau')) |z_t\rangle \;=$$

$$=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z' \beta_1(z) \beta_2(z') w\left(z, \tau; z_0, 0\right) w\left(z', \tau'; z_0, 0\right) w\left(z_t, t; z', \tau'\right),$$

где $0 \le \tau \le \tau' \le t$, $\beta_1(z)$ и $\beta_2(z)$ – произвольные локально интегрируемые функции.

60.

$$\langle z_0|z^*(\tau)z(\tau')|z_t\rangle \;=$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z' z^* z' w\,(z,\tau;z_0,0)\; w\,(z',\tau';z,\tau)\; w\,(z,t;z',\tau'),$$

где $0 \le \tau \le \tau' \le t.$

61.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|z(\tau)z^*(\tau')|z_t\rangle \;=$$

$$= \exp(-\nu\tau' + \nu\tau)\Big\{\sigma\exp(-2\nu t - 2\tau') + |z_0|^2\exp(-2\nu\tau)\Big\},$$

где $0 \le \tau \le \tau' \le t.$

62.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0)\langle z_0|z(\tau)z^*(\tau')|z_t\rangle \;=\; \exp(-\nu\tau' + \nu\tau)w\,(z_t)\times$$

$$\times\Big\{\sigma\,[1 - \exp(-2\nu t + 2\nu\tau')] \;+\; |z_t|^2\exp(-2\nu t + 2\nu\tau')\Big\},$$

где $0 \le \tau \le \tau' \le t.$

63.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|z(\tau)z^*(\tau')|z_t\rangle \;=\; \sigma\exp\left(-\nu|\tau' - \tau|\right).$$

64.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau \int\limits_0^t z^*(\tau')\,d\tau'|z_t\rangle \;=\; (2\sigma/\nu^2)\,(\nu t - 1 + \mathrm{e}^{-\nu t}).$$

65.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\int\limits_0^t \beta_1(\tau)z(\tau)\,d\tau \int\limits_0^t \beta_2(\tau')z^*(\tau')\,d\tau'|z_t\rangle \;=$$

$$= \sigma\int\limits_0^t\int\limits_0^t \beta_1(\tau)\beta_2(\tau')\exp\left(-\nu|\tau - \tau'|\right)\,d\tau\,d\tau'.$$

66.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0\,|\exp\{\,\lambda z(\tau)\}\,|\,z_t\rangle \;=\; 1,$$

где $0 \le \tau \le t.$

67.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{ \lambda \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau \right\} |z_t\rangle \;=\; 1.$$

68.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{ \lambda \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau \right\} |z_t\rangle \;=\; 1.$$

69.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{ \lambda\, \mathrm{Re} \left[\int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau \right] \right\} |z_t\rangle \;=$$

$$=\; \exp\left\{ \frac{\lambda^2\sigma}{2\nu^2} \left(\nu t - 1 + \mathrm{e}^{-\nu t}\right) \right\}.$$

70.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{ \lambda\, \mathrm{Im} \left[\int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau \right] \right\} |z_t\rangle \;=$$

$$=\; \exp\left\{ \frac{\lambda^2\sigma}{2\nu^2} \left(\nu t - 1 + \mathrm{e}^{-\nu t}\right) \right\}.$$

71.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{ \lambda\, \mathrm{Re} \left[\int\limits_0^t \beta(\tau) z(\tau)\, d\tau \right] \right\} |z_t\rangle \;=$$

$$=\; \exp\left\{ \frac{1}{4}\, \lambda^2\sigma \int\limits_0^t \int\limits_0^t \beta(\tau)\beta^*(\tau') \exp(-\nu|\tau-\tau'|)\, d\tau\, d\tau' \right\}.$$

72.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{ \lambda\, \mathrm{Im} \left[\int\limits_0^t \beta(\tau) z(\tau)\, d\tau \right] \right\} |z_t\rangle \;=$$

$$=\; \exp\left\{ \frac{1}{4}\, \lambda^2\sigma \int\limits_0^t \int\limits_0^t \beta(\tau)\beta^*(\tau') \exp\left(-\nu|\tau-\tau'|\right)\, d\tau\, d\tau' \right\}.$$

73.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{ \mathrm{Re} \left[\mu_0 z_0 + \mu_t z_t + \lambda \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau \right] \right\} |z_t\rangle \;=$$

$$=\; \exp\left\{ \frac{\sigma}{4}\, \left(\mu_0^2 + \mu_t^2\right) + \frac{\lambda\sigma}{2\nu}\, (\mu_0 + \mu_t) \left(1 - \mathrm{e}^{-\nu t}\right) \;+\; \frac{\lambda^2\sigma}{2\nu^2} \left(\nu t - 1 + \mathrm{e}^{-\nu t}\right) \right\},$$

где μ_0, μ_t – произвольные вещественные числа.

74.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{\, \mathrm{Im}\left[\mu_0 z_0 + \mu_t z_t + \lambda \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau\right]\right\} |z_t\rangle \;=$$

$$= \;\exp\left\{\frac{\sigma}{4}\,\left(\mu_0^2 + \mu_t^2\right) + \frac{\lambda\sigma}{2\nu}\,(\mu_0 + \mu_t)\left(1 - \mathrm{e}^{-\nu t}\right) \;+\; \frac{\lambda^2\sigma}{2\nu^2}\left(\nu t - 1 + \mathrm{e}^{-\nu t}\right)\right\},$$

где μ_0, μ_t – произвольные вещественные числа.

75.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{\, \mathrm{Re}\left[\mu_0 z_0 + \mu_t z_t + \lambda \int\limits_0^t \beta(\tau) z(\tau)\, d\tau\right]\right\} |z_t\rangle \;=$$

$$= \;\exp\left\{\frac{\sigma}{4}\left(\mu_0^2 + \mu_t^2\right) + \frac{\lambda^2\sigma}{4}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \exp\left(-\nu|\tau - \tau'|\right)\beta(\tau)\beta^*(\tau')\, d\tau\, d\tau' \;+\right.$$

$$\left. +\; \frac{\lambda\sigma}{2}\int\limits_0^t \left(\mu_0 \mathrm{e}^{-\nu\tau} + \mu_t \mathrm{e}^{-\nu t + \nu\tau}\right) \mathrm{Re}[\beta(\tau)]\, d\tau\right\},$$

где μ_0, μ_t – произвольные вещественные числа..

76.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{\, \mathrm{Im}\left[\mu_0 z_0 + \mu_t z_t + \lambda \int\limits_0^t \beta(\tau) z(\tau)\, d\tau\right]\right\} |z_t\rangle \;=$$

$$= \;\exp\left\{\frac{\sigma}{4}\left(\mu_0^2 + \mu_t^2\right) + \frac{\lambda^2\sigma}{4}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \exp\left(-\nu|\tau - \tau'|\right)\beta(\tau)\beta^*(\tau')\, d\tau\, d\tau' \;+\right.$$

$$\left. +\; \frac{\lambda\sigma}{2}\int\limits_0^t \left(\mu_0 \mathrm{e}^{-\nu\tau} + \mu_t \mathrm{e}^{-\nu t + \nu\tau}\right) \mathrm{Re}[\beta(\tau)]\, d\tau\right\},$$

где μ_0, μ_t – произвольные вещественные числа..

77.

$$\langle z_0|z(\tau)z^*(\tau)z(\tau')z^*(\tau')|z_t\rangle \;=$$

$$= \;\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z' |zz'|^2 w\,(z,\tau; z_0, 0)\, w\,(z',\tau'; z,\tau)\, w\,(z_t, t; z',\tau'),$$

где $0 \le \tau \le \tau' \le t$.

78.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z(\tau) z^*(\tau) z(\tau') z^*(\tau') | z_t \rangle \ =$$

$$= \ (1 - q_{12}^2)^{-1} \left[\sigma^2 \left(1 - q_{01}^2\right) + \sigma |z_0|^2 q_{01}^2 \right] +$$

$$+ \ q_{12}^2 \left[2\sigma^2 \left(1 - q_{01}^2\right) + 4\sigma |z_0|^2 q_{01}^2 \left(1 - q_{01}^2\right) + |z_0|^2 q_{01}^4 \right],$$

где $0 \le \tau \le \tau' \le t, \quad q_{01} \ = \ \exp(-\nu\tau), \quad q_{12} \ = \ \exp(-\nu\tau' + \nu\tau).$

79.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0 \, w(z_0) \langle z_0 | z(\tau) z^*(\tau) z(\tau') z^*(\tau') | z_t \rangle \ =$$

$$= \ w(z_t) \left\{ (1 - q_{12}^2) \ \left[\sigma^2 q_{2t} + \sigma |z_t|^2 q_{2t}^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \ q_{12}^2 \left[2\sigma^2 q_{2t}^2 + 4\sigma |z_t|^2 q_{2t} \left(1 - q_{12}^2\right) + |z_t|^4 q_{2t}^4 \right] \right\},$$

где $0 \le \tau \le \tau' \le t, \quad q_{1t} \ = \ \exp[-\nu\,(\tau' - \tau)], \quad q_{2t} \ = \ \exp[-\nu\,(t - \tau')].$

80.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0 \, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z(\tau) z^*(\tau) z(\tau') z^*(\tau') | z_t \rangle \ =$$

$$= \ \sigma \left[1 + \exp\left(-\nu|\tau' - \tau|\right)\right],$$

где $0 \le \tau, \tau' \le t.$

81.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | \int\limits_0^t |z(\tau)|^2 \, d\tau \int\limits_0^t |z\left(\tau'\right)|^2 \, d\tau' | z_t \rangle \ =$$

$$= \ \nu^{-2} \left\{ \sigma^2 \left(\nu^2 t^2 + \nu t - \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-2\nu t} \right) + \ (\sigma |z_0|^2 - \sigma^2)\,(1 - 2\nu t - \mathrm{e}^{-2\nu t}) \ - \right.$$

$$\left. - \ \left(\frac{1}{2}\,\sigma^2 - \sigma |z_0|^2 + \frac{1}{4}\, |z_0|^4 \right) (1 - 2\mathrm{e}^{-2\nu t} + \mathrm{e}^{-4\nu t}) \right\}.$$

82.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \langle z_0| \int\limits_0^t |z(\tau)|^2\, d\tau \int\limits_0^t |z(\tau')|^2\, d\tau' |z_t\rangle \;=$$

$$= \;\nu^{-2} w(z_t) \Bigg\{ \sigma^2 \left(\nu^2 t^2 + \nu t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-2\nu t} \right) \;+$$

$$+ \;(\sigma |z_t|^2 - \sigma^2)\, (1 + \nu t - \; \mathrm{e}^{-2\nu t} - 3\nu t\; \mathrm{e}^{-2\nu t}) \;+$$

$$+ \;\left(\sigma^2 - 2\sigma |z_t|^2 + \frac{1}{2}\, |z_t|^4 \right) (1 - \; \mathrm{e}^{-2\nu t} - 2\nu t\; \mathrm{e}^{-2\nu t}) \Bigg\}.$$

83.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0| \int\limits_0^t \beta_1(\tau) |z(\tau)|^2\, d\tau \int\limits_0^t \beta_2(\tau') |z(\tau')|^2 d\tau' |z_t\rangle \;=$$

$$= \;\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^t d\tau' \beta_1(\tau) \beta_2(\tau')\, [1 + \exp\left(-\nu|\tau - \tau'|\right)].$$

84.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0| \int\limits_0^t |z(\tau)|^2\, d\tau \int\limits_0^t |z(\tau')|^2\, d\tau' |z_t\rangle \;=$$

$$= \;\frac{1}{2}\, (\sigma/\nu)^2 \left[2\nu^2 t^2 + 2\nu t - 1 + \exp(-2\nu t) \right].$$

85.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0| \exp\left\{ -\lambda_0 |z_0|^2 - \lambda_t |z_t|^2 \right\} |z_t\rangle \;=$$

$$= \;\{(1 + \lambda_0 \sigma)(1 + \lambda_t \sigma) - \lambda_0 \lambda_t \sigma^2 \mathrm{e}^{-2\nu t}\}^{-1}.$$

86.

$$\langle z_\tau|\; \exp\left\{ -\lambda \int\limits_\tau^t |z(\tau)|^2\, d\tau \right\} |z_t\rangle \;=\; \frac{r \exp[(\nu - r)(t - \tau)]}{\pi\nu \{1 \;-\; \exp[-r(t - \tau)]\}^2} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{r - \nu}{2\nu\sigma} (|z_t|^2 - |z_\tau|^2) - \frac{r}{\nu\sigma} |z_t - \; z_\tau \exp[-r(t - \tau)]|^2 \right\}.$$

87.

$$\langle z_0| \exp\left\{ -\lambda \int\limits_\tau^t |z(\tau')|^2 d\tau' \right\} |z_t\rangle \;=$$

$$= \;\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_\tau w\, (z_\tau, \tau; z_0, 0)\, \langle z_\tau| \exp\left\{ -\lambda \int\limits_\tau^t |z(\tau')|^2\, d\tau' \right\} \} |z_t\rangle,$$

где $0 \le \tau \le t$.

88.

$$\langle z_0|\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau)|^2 d\tau\right\}|z_t\rangle \;=$$

$$=\; \frac{rq}{\pi\nu\sigma\,(1-q^2)}\exp\left\{\nu t+\frac{r-\nu}{2\nu\sigma}\left(|z_t|^2-|z_0|^2\right)-\frac{r}{\nu\sigma}\left(1-q^2\right)^{-1}|z_t-qz_0|^2\right\}.$$

89.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\,w(z_0)\langle z_0|\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle \;=$$

$$=\; \frac{2rq}{\pi\sigma\,(r_+ + q^2r_-)}\exp\left\{\nu t-\frac{r_+^2-q^2r_-^2}{2\nu\sigma\,(r_+ + q^2r_-)}|z_t|^2\right\}.$$

90.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\;\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle \;=$$

$$=\; \frac{2rq}{r_+ + q^2r_-}\exp\left\{\nu t-\frac{(r^2-\nu^2)\,(1-q^2)}{2\nu\sigma\,(r_+ + q^2r_-)}|z_0|^2\right\}.$$

91.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\,w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\;\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle \;\equiv$$

$$\equiv\; Q(\lambda) \;=$$

$$=\; 4r\nu\exp(\nu t)\left[(r+\nu)^2\exp(rt)-(r-\nu)^2\exp(-rt)\right]^{-1}.$$

92.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\,w(z_0)\langle z_0|z_0\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle \;=$$

$$=\; \frac{4r^2q\exp(\nu t)}{\pi\sigma\,(r_+ + q^2r_-)^2}z_t\exp\left\{-\frac{r_+^2-q^2r_-^2}{2\nu\sigma\,(r_+ + q^2r_-)}|z_t|^2\right\}.$$

93.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|z_t\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle \;=$$

$$=\; \frac{4r^2q\exp(\nu t)}{(r_+ + q^2r_-)^2}z_0\exp\left\{-\frac{(r^2-\nu^2)\,(1-q^2)}{2\nu\sigma\,(r_+ + q^2r_-)}|z_0|^2\right\}.$$

94.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \langle z_0 | z_0 z_0^* \exp\left\{ -\lambda \int\limits_0^t |z(\tau)|^2\, d\tau \right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \frac{4 r \nu \sigma q \exp(\nu t)}{\pi\, (r_+ + q^2 r_-)^2} \left\{ 1 + \frac{2 r^2 q^2}{\nu\sigma\, (1-q^2)\, (r_+ + q^2 r_-)} |z_t|^2 \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{(r_+^2 - q^2 r_-^2)}{2\nu\sigma\, (r_+ + q^2 r_-)} |z_0|^2 \right\}.$$

95.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z_0 z_0^* \exp\left\{ -\lambda \int\limits_0^t |z(\tau)|^2 d\tau \right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \frac{8 r \nu^2 \sigma^2 q \exp(\nu t)}{(r_+ + q^2 r_-)\, (r_+^2 - q^2 r_-^2)^2} \left[\left(1 - q^2\right) \left(r_+^2 - q^2 r_-^2\right) + 4 r^2 q^2 \right].$$

96.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z_t z_t^* \exp\left\{ -\lambda \int\limits_0^t |z(\tau)|^2 d\tau \right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \frac{4 r q \exp(\nu t)}{(r_+ + q^2 r_-)^3} \left[\nu\sigma \left(1 - q^2\right) \left(r_+ + q^2 r_-\right) + 2 r^2 q^2 |z_0|^2 \right] \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{(r^2 - \nu^2)\, (1 - q^2)}{2\nu\sigma\, (r_+ + q^2 r_-)} |z_0|^2 \right\}.$$

97.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0 | z_t z_t^* \exp\left\{ -\lambda \int\limits_0^t |z(\tau)|^2 d\tau \right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \frac{8 r \nu^2 \sigma \exp(\nu t)}{(r_+ + q^2 r_-)\, (r_+^2 - q^2 r_-^2)^2} \left[\left(1 - q^2\right) \left(r_+^2 - q^2 r_-^2\right) + 4 r^2 q^2 \right].$$

98.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \langle z_0 | \left(z_0 z_t^* + z_0^* z_t \right) \exp\left\{ -\lambda \int\limits_0^t |z(\tau)|^2\, d\tau \right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \frac{8 r^2 q^2 \exp(\nu t)}{\pi\sigma\, (r_+ + q^2 r_-)^2} |z_t|^2 \exp\left\{ -\frac{r_+^2 - q^2 r_-^2}{2\nu\sigma\, (r_+ + q^2 r_-)} |z_t|^2 \right\}.$$

99.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\,(z_0z_t^*+z_0^*z_t)\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t|z(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle\ =$$

$$=\ \frac{8r^2q^2\exp(\nu t)}{(r_+ + q^2r_-)^2}|z_0|^2\exp\left\{-\frac{(r^2-\nu^2)\,(1-q^2)}{2\nu\sigma\,(r_+ + q^2r_-)}|z_0|^2\right\}.$$

100.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\,w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\,(z_0z_t^*+z_0^*z_t)\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t|z(\tau)|^2d\tau\right\}|z_t\rangle\ =$$

$$=\ 32r^2\nu^2q^2\sigma \mathrm{e}^{\nu t}\,\left[(r+\nu)^2-(r-\nu)^2\mathrm{e}^{-2\nu t}\right]^{-1}.$$

101.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\,w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\ \exp\left\{-\lambda_{0t}\left(|z_0|^2+|z_t|^2\right)-\lambda\int\limits_0^t|z(\tau)|^2d\tau\right\}|z_t\rangle\ =$$

$$=\ 4r\nu q\mathrm{e}^{\nu t}\left[4\lambda_{0t}^2\nu^2\sigma^2(1-q^2)+4\lambda_{0t}\nu\sigma\left(r_+^2+q^2r_-^2\right)+\left(r_+^2-q^2r_-^2\right)\right]^{-1}.$$

102.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\,w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\exp\left\{-\lambda_0|z_0|^2-\lambda_t|z_t|^2-\lambda\int\limits_0^t|z(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle\ =$$

$$=\ 4r\nu q\mathrm{e}^{\nu t}\left[4\lambda_0\lambda_t\nu^2\sigma^2\,(1-q^2)+2\,(\lambda_0+\lambda_t)\,\nu\sigma\left(r_+^2+q^2r_-^2\right)+r_+^2-q^2r_-^2\right]^{-1}.$$

103.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\,w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{N\tau}\langle z_0|\exp\left\{-\lambda\sum_{n=0}^{N}|z(n\tau)|^2\right\}|z_{N\tau}\rangle\ =$$

$$=\ pR\left[\left(a_+-q_\tau^2\right)^2a_+^N-\left(a_--q_\tau^2\right)^2a_-^N\right]^{-1},$$

где

$$q_\tau\ =\ \exp(-\nu\tau),\qquad p\ =\ 1-q_\tau^2,$$

$$R\ =\ \sqrt{\left(1+q_\tau^2+\lambda\sigma p\right)^2-4q_\tau^2}\,,$$

$$a_+\ =\ \left(1+q_\tau^2+\lambda\sigma p+R\right)/2,\qquad a_-\ =\ \left(1+q_\tau^2+\lambda\sigma p-R\right)/2.$$

104.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_{N\tau+\Delta} \langle z_0| \exp\Big\{ -\lambda \sum_{n=0}^{N} \Big| z(n\tau) + z(n\tau+\Delta) \Big|^2 \Big\} |z_{N\tau+\Delta}\rangle \ =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_{N\tau} \langle z_0| \exp\left\{ -2\lambda \left(1 + \mathrm{e}^{-\nu\Delta}\right) \sum_{n=0}^{N} |z(n\tau)|^2 \right\} |z_{N\tau}\rangle,$$

где Δ – вещественное число.

105.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_{N\tau+\Delta} \langle z_0| \exp\Big\{ -\tfrac{\lambda}{2} \sum_{n=0}^{N} \Big[z(n\tau) z^*(n\tau+\Delta) +$$

$$+ z^*(n\tau) z(n\tau+\Delta) \Big] \Big\} |z_{N\tau+\Delta}\rangle \ =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_{N\tau} \langle z_0| \exp\left\{ -\tfrac{\lambda}{2} \left(1 + \mathrm{e}^{-\nu\Delta}\right) \sum_{n=0}^{N} |z(n\tau)|^2 \right\} |z_{N\tau}\rangle \ \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_{N\tau} \langle z_0| \exp\left\{ \tfrac{\lambda}{2} \left(1 - \mathrm{e}^{-\nu\Delta}\right) \sum_{n=0}^{N} |z(n\tau)|^2 \right\} |z_{N\tau}\rangle,$$

где Δ – вещественное число.

106.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_{N\tau} \langle z_0|\ \exp\left\{ -\lambda \sum_{n=0}^{N} |z(n\tau) + \beta(n\tau)|^2 \right\} |z_{N\tau}\rangle \ =$$

$$= \ pR \left[\left(a_+ - q_\tau^2\right)^2 a_+^N - \left(a_- - q_\tau^2\right)^2 a_-^N \right]^{-1} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\lambda \sum_{n=0}^{N} |\beta(n\tau)|^2 + \lambda^2 \sum_{n=0}^{N} \left(D_n D_{n+1}\right)^{-1} \left| \sum_{m=n}^{N} \beta(m\tau) q_\tau^{m-n} D_{m+1} \right|^2 \right\},$$

где

$$q_\tau \ = \ \exp(-\nu\tau), \qquad p \ = \ 1 - q_\tau^2,$$

$$R \ = \ \sqrt{\left(1 + q_\tau^2 + \lambda\sigma p\right)^2 - 4q_\tau^2}\,,$$

$$D_n \ = \ \left(a_+ - q_\tau^2\right)^2 a_+^{N-n} - \left(a_- - q_\tau^2\right)^2 a_-^{N-n}, \qquad 0 \le n \le (N+1),$$

$$a_+ \ = \ \left(1 + q_\tau^2 + \lambda\sigma p + R\right)/2, \qquad a_- \ = \ \left(1 + q_\tau^2 + \lambda\sigma p - R\right)/2.$$

107.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0| \frac{1}{N!} \left[\int\limits_0^t |z(\tau)|^2 d\tau \right]^N \exp\left\{ - \int\limits_0^t |z(\tau)|^2 d\tau \right\} |z_t\rangle \;=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \exp(-iN\varphi) Q(1-\mathrm{e}^{i\varphi})\, d\varphi,$$

где N – натуральное число.

108.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0| \cos\left\{ \lambda \int\limits_0^t |z(\tau)|^2\, d\tau \right\} |z_t\rangle \;=\; \frac{4\nu \mathrm{e}^{\nu t}\,(\rho_1 A + \rho_2 B)}{(A^2+B^2)},$$

где

$$\rho_1 \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\nu^4+4\lambda^2\nu^2\sigma^2} + \nu^2\right)}, \qquad \rho_2 \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\nu^4+4\lambda^2\nu^2\sigma^2} - \nu^2\right)},$$

$$A \;=\; (a_1C - b_1S)\exp(\rho_1 t) - (a_2C + b_2S)\exp(-\rho_1 t),$$

$$B \;=\; (b_1C + a_1S)\exp(\rho_1 t) - (b_1C - a_1S)\exp(-\rho_1 t),$$

$$a_1 \;=\; (\rho_1+\nu)^2 - \rho_1^2, \qquad b_1 \;=\; 2\rho_2\,(\rho_1+\nu), \qquad C \;=\; \cos(\rho_2 t),$$

$$a_2 \;=\; (\rho_1-\nu)^2 - \rho_2^2, \qquad b_2 \;=\; 2\rho_2\,(\rho_1-\nu), \qquad S \;=\; \sin(\rho_2 t).$$

109.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0| \sin\left\{ \lambda \int\limits_0^t |z(\tau)|^2\, d\tau \right\} |z_t\rangle \;=\; \frac{4\nu \mathrm{e}^{\nu t}\,(\rho_1 A - \rho_2 B)}{(A^2+B^2)},$$

где

$$\rho_1 \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\nu^4+4\lambda^2\nu^2\sigma^2} + \nu^2\right)}, \qquad \rho_2 \;=\; \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\nu^4+4\lambda^2\nu^2\sigma^2} - \nu^2\right)},$$

$$A \;=\; (a_1C - b_1S)\exp(\rho_1 t) - (a_2C + b_2S)\exp(-\rho_1 t),$$

$$B \;=\; (b_1C + a_1S)\exp(\rho_1 t) - (b_1C - a_1S)\exp(-\rho_1 t),$$

$$a_1 \;=\; (\rho_1+\nu)^2 - \rho_1^2, \qquad b_1 \;=\; 2\rho_2\,(\rho_1+\nu), \qquad C \;=\; \cos(\rho_2 t),$$

$$a_2 \;=\; (\rho_1-\nu)^2 - \rho_2^2, \qquad b_2 \;=\; 2\rho_2\,(\rho_1-\nu), \qquad S \;=\; \sin(\rho_2 t).$$

110.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0| \left\{ \int\limits_0^t |z(\tau)|^2\, d\tau \right\}^{-1} |z_t\rangle \ =$$

$$= \ 4\nu e^{\nu t} \int\limits_0^{\infty} \frac{r}{(r+\nu)^2 \exp(rt) - (r-\nu)^2 \exp(-rt)}\, d\lambda.$$

111.

Пусть функция $G(\eta)$ целая, для которой разложение $G(\eta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!}\,\eta^n$ сходится всюду на $\mathbb{C}$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0| G \left\{ \int\limits_0^t |z(\tau)|^2 d\tau \right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \ (2\pi)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \int\limits_0^{2\pi} Q(e^{i\varphi}) \exp(in\varphi)\, d\varphi.$$

112.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{ -\lambda \int\limits_u^t |z(\tau)|^2\, d\tau \right\} |z_T\rangle \ =$$

$$= \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz_u w(z_u) \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz_t \langle z_u| \exp\left\{ -\lambda \int\limits_u^t |z(\tau)|^2\, d\tau \right\} |z_t\rangle,$$

где $0 \le u \le t \le T$.

113.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_\tau w(z_\tau) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{t+\tau} \langle z_0| G\,(z_\tau, z_{t+\tau}) \exp\left\{ -\lambda \int\limits_\tau^{t+\tau} |z(\tau')|^2 d\tau' \right\} |z_{t+\tau}\rangle \ =$$

$$= \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\, \langle z_0|\, G\,(z_0, z_t) \exp\left\{ -\lambda \int\limits_0^t |z\,(\tau')\,|^2\, d\tau' \right\} |z_t\rangle,$$

где $G\,(z_0, z_t)$ – произвольная локально интегрируемая функция.

114.

Пусть случайная величина T является моментом времени достижения монотонно возрастающей функцией $\Omega = \int\limits_0^t |z(\tau)|^2\, d\tau$ фиксированного положительного уровня A. Тогда плотность распределения вероятностей $p_{{}_T}(t)$ следующая:

$$p_{{}_T}(t) \ = \ \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \delta\,(t - \Omega)\, |z_T\rangle \ =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\lambda\, \exp(i\lambda A)\left(\frac{d}{d\lambda}Q(i\lambda)\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\nu^2\sigma \mathrm{e}^{\nu t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(i\lambda A)\frac{\rho\left[(\rho+\nu)\exp(\rho t)+(\rho-\nu)\exp(-\rho t)\right]}{\left[(\rho+\nu)^2\exp(\rho t)-(\rho-\nu)^2\exp(-\rho t)\right]^2}\,d\lambda,$$

где $\rho = \sqrt{\nu^2+2i\lambda\nu\sigma}$.

115.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\,\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t|z(\tau)|^2\,d\tau\right\}\times$$

$$\times\, G\left[\int\limits_0^t\left[z(\tau)\beta^*(\tau)+z^*(\tau)\beta(\tau)\right]d\tau\right]|z_t\rangle =$$

$$= Q(\lambda)\,\frac{1}{\pi S(t)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(\eta)\exp(-\eta^2/S_t)\,d\eta,$$

где $G(\eta)$ – произвольная локально интегрируемая функция,

$$S(t) = \sigma\int\limits_0^t\left|\int\limits_\tau^t\beta(\tau')\,D(\tau')\,d\tau'\right|^2 D^{-2}(\tau)\,d\tau,$$

$$D(\tau) = \frac{1}{2r}\,\mathrm{e}^{\nu\tau}\left[r_+\exp\left(r_+t-r_+\tau\right)+r_-\exp\left(-r_-t+r_-\tau\right)\right].$$

116.

$$\langle z_0|\,\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t|z(\tau)+\beta(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle =$$

$$= \frac{r}{\pi\nu\sigma}\,\mathrm{e}^{\nu t}\left(\mathrm{e}^{rt}-\mathrm{e}^{-rt}\right)^{-1}\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t|\beta(\tau)|^2\,d\tau+\frac{\nu\sigma}{2}\int\limits_0^t|A(\tau)|^2d\tau+\right.$$

$$+\, z_tA^*(t)+z_t^*A(t)\frac{r-\nu}{2\nu\sigma}\left(|z_t|^2-|z_0|^2\right)-$$

$$\left.-\,\frac{r}{\nu\sigma}(1-\mathrm{e}^{-2rt})^{-1}\left|z_t-z_0\mathrm{e}^{-rt}+\nu\sigma\int\limits_0^t|A(\tau)|^2\exp(r\tau-rt)\,d\tau\right|^2\right\},$$

где

$$A(\tau) = -2\lambda\int\limits_0^t\beta(\tau')\exp\left(r\tau-r\tau'\right)\,d\tau'.$$

117.

$$\langle z_0|\ \exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau)+\mu|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle\ =$$

$$=\ \frac{r}{\pi\nu\sigma}\,\mathrm{e}^{\nu t}\left(\mathrm{e}^{rt}-\mathrm{e}^{-rt}\right)^{-1}\exp\Bigg\{-\lambda|\mu|^2t+\frac{r-\nu}{2\nu\sigma}(|z_t|^2-|z_0|^2)+$$

$$+\ \frac{2\lambda}{r}\left(1-\mathrm{e}^{-rt}\right)(z_t\mu^*+z_t^*\mu)+\frac{1}{4}\,\lambda^2\nu\sigma|\mu|^2r^{-2}\left(1+2rt-2\mathrm{e}^{rt}+\mathrm{e}^{2rt}\right)-$$

$$-\ \frac{r}{\nu\sigma}\left(1-q^{-2}\right)^{-1}\left|z_t-z_0q^{-1}+\frac{1}{2}\,\lambda\nu\sigma\mu r^{-2}\left(2-\mathrm{e}^{rt}-\mathrm{e}^{-rt}\right)\right|^2\Bigg\},$$

где μ – комплексное число.

118.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\,w(z_0)\langle z_0|\ \exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau)+\beta(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle\ =$$

$$=\ \frac{2r}{\pi\sigma}\exp(\nu t)\left[(r+\nu)\mathrm{e}^{rt}+(r-\nu)\mathrm{e}^{-rt}\right]^{-1}\times$$

$$\times\exp\Bigg\{-\lambda\int\limits_0^t|\beta(\tau)|^2d\tau+z_tA^*(t)+z_t^*A(t)+\frac{1}{2}\nu\sigma\int\limits_0^t|A(\tau)|^2\,d\tau+$$

$$+\ \frac{r-\nu}{2\nu\sigma}|z_t|^2-\frac{r}{\nu\sigma}\frac{(r+\nu)\exp(rt)}{(r+\nu)\exp(rt)+(r-\nu)\exp(-rt)}|B(t)|^2\Bigg\},$$

где

$$A(\tau)\ =\ -2\lambda\int\limits_0^\tau\beta(\tau')\exp\left(r\tau'-r\tau\right)\,d\tau',$$

$$B(t)\ =\ z_t+\nu\sigma\int\limits_0^t A(\tau')\exp(r\tau'-rt)\,d\tau'.$$

119.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t\langle z_0|\ \exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau)+\beta(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle\ =$$

$$=\ 2r\mathrm{e}^{\nu t}\left[(r+\nu)\mathrm{e}^{rt}+(r-\nu\mathrm{e}^{-rt}\right]^{-1}\exp\Bigg\{-\lambda\int\limits_0^t|\beta(\tau)|^2d\tau\ +$$

$$+\frac{1}{2}\nu\sigma\int\limits_0^t|A(\tau)|^2d\tau-\frac{r-\nu}{2\nu\sigma}|z_0|^2-\frac{r}{\nu\sigma}\left(1-\mathrm{e}^{-2rt}\right)^{-1}|B(\tau)|^2+$$

$$+2\nu\sigma\left(1-\mathrm{e}^{-2rt}\right)\left[(r+\nu)+(r-\nu)\mathrm{e}^{-2rt}\right]^{-1}\left|A(t)-\frac{r}{\nu\sigma}\left(1-\mathrm{e}^{-2rt}\right)^{-1}B(t)\right|^2\Bigg\},$$

где

$$A(\tau)\;=\;-2\lambda\int\limits_0^\tau\beta(\tau')\exp(r\tau'-r\tau)\,d\tau',$$

$$B(t)\;=\;-z_0\exp(-rt)+\nu\sigma\int\limits_0^t A(\tau')\exp(r\tau'-rt)\,d\tau'.$$

120.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^2z_0\,w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^2z_t\langle z_0|\,\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t|z(\tau)+\beta(\tau)|^2\,d\tau\right\}|z_t\rangle\;=$$

$$=\;Q(\lambda)\exp\Bigg\{-\lambda\int\limits_0^t|\beta(\tau)|^2+\frac{\lambda^2\nu\sigma/r}{(r+\nu)^2\exp(rt)-(r-\nu)^2\exp(-rt)}\times$$

$$\times\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\tau^t d\tau'\left[(r+\nu)\mathrm{e}^{r\tau}+(r-\nu)\mathrm{e}^{-r\tau}\right]\;\times$$

$$\times\left[(r+\nu)\mathrm{e}^{-r(t-\tau')}+(r-\nu)\mathrm{e}^{-r(t-\tau')}\right]\left[\beta(\tau)\beta^*(\tau')+\beta^*(\tau)\beta(\tau')\right]\Bigg\}.$$

121.

Пусть случайная величина T является временем достижения монотонно возрастающей функцией $\Omega=\int\limits_0^t|z(\tau)+\beta(\tau)|^2\,d\tau$ фиксированного заданного положительного уровня A. Тогда плотность распределения вероятностей $p_{{}_T}(t)$ имеет следующий вид

$$p_{{}_T}(t)\;=\;\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^2z_0\,w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^2z_t\langle z_0|\,\delta\,(t-\Omega)\,|z_T\rangle\;=$$

$$=\;-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\lambda\,\mathrm{e}^{i\lambda A}\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{4\nu\rho\exp(\nu t)}{(\rho+\nu)^2\mathrm{e}^{\rho t}+(\rho-\nu)^2\mathrm{e}^{-\rho t}}\exp\left[-\lambda\int\limits_0^t|\beta(\tau)|^2+J(t)\right]\right\},$$

где

$$\rho\;=\;\sqrt{\nu^2+2i\lambda\nu\sigma},$$

$$J(t)\;=\;\frac{\lambda^2\nu\sigma}{\rho\,\left[(\rho+\nu)^2\exp(\rho t)-(\rho-\nu)^2\exp(-\rho t)\right]}\times$$

$$\times \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\tau^t d\tau' \, [(\rho+\nu)\mathrm{e}^{\rho\tau} + (\rho-\nu)\mathrm{e}^{-\rho\tau}] \times$$

$$\times \left[(\rho+\nu)\mathrm{e}^{-\rho(t-\tau')} + (\rho-\nu)\mathrm{e}^{-\rho(t-\tau')}\right] [\beta(\tau)\beta^*(\tau') + \beta^*(\tau)\beta(\tau')].$$

122.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t |z(\tau)+\mu|^2\, d\tau\right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \ Q(\lambda)\exp\Bigg\{-\lambda|\mu|^2 t + \frac{2\lambda^2\nu\sigma/r^3}{(r+\nu)^2\exp(rt) \ - \ (r-\nu)^2\exp(-rt)}\,|\mu|^2\times$$

$$\times\, [4\nu^2 - 2\nu(r+\nu)\mathrm{e}^{r\tau} + 2\nu(r-\nu)\mathrm{e}^{-r\tau} + rt(r+\nu)^2\mathrm{e}^{rt} - rt(r-\nu)^2\mathrm{e}^{-rt}]\Bigg\},$$

где μ – комплексное число.

123.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t |z(\tau)-\mu z_0|^2\, d\tau\right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \ \frac{2r\ \exp(\nu t)}{(r+\nu)\exp(r\tau) + (r-\nu)\exp(-r\tau)} G_t^{-1},$$

где

μ – вещественное число,

$$G_t \ = \ r\nu^{-1}b_t\,(1-\mathrm{e}^{-2rt})^{-1} - 1 + \lambda\mu^2\sigma t + \frac{r-\nu}{2\nu} \ -$$

$$- \ (\lambda^2\nu^2\sigma^2/r^3)\,(\mathrm{e}^{2rt} - 4\mathrm{e}^{rt} + 3 + 2rt) \ +$$

$$+ \ \frac{2\nu(1-\exp(2rt))}{(r+\nu)-(r-\nu)\exp(2rt)} \left[(2\lambda\mu\sigma/r)\left(\mathrm{e}^{rt}-1\right) + rb_t\nu^{-1}\left(1-\mathrm{e}^{2rt}\right)^{-1}\right]^2,$$

$$b_t \ = \ \mathrm{e}^{rt} + (\lambda\mu\sigma/r^2)\,(2-\mathrm{e}^{rt}-\mathrm{e}^{-rt}).$$

124.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t |z(\tau)-\mu z_t|^2\, d\tau\right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \ \frac{2r\ \exp(\nu t)}{(r+\nu)\exp(r\tau) + (r-\nu)\exp(-r\tau)} G_t^{-1},$$

где μ – вещественное число,

$$G_t = \lambda\mu^2\sigma - (4\lambda\mu\sigma/r^2)\left(\mathrm{e}^{rt}-1\right) - \frac{r-\nu}{2\nu} -$$
$$- \left(\lambda^2\mu^2\nu\sigma^2/r^3\right)\left(\mathrm{e}^{2rt} - 4\mathrm{e}^{rt} + rt + 3\right) +$$
$$+ \frac{r+\nu}{\nu} r\mathrm{e}^{rt}\left[(r+\nu)\mathrm{e}^{rt} + (r-\nu)\mathrm{e}^{-rt}\right]^{-1}\left[1 + \left(2\lambda\mu\nu\sigma/r^2\right)\left(\mathrm{e}^{rt} - rt + 1\right)\right].$$

125.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau) - \mu\tau z_0|^2\, d\tau\right\}|z_t\rangle =$$
$$= 2rqG_t^{-1}\exp(\nu t)\left[(r+\nu) + (r-\nu)q^2\right],$$

где μ – вещественное число,

$$G_t = \frac{r_+}{2\nu} + \frac{1}{3}\lambda\mu^3\sigma t^3 - \lambda^2\mu^2\nu\sigma J_1 r^{-5} + (r/\nu)\left(1-q^2\right)^{-1}\left(q - \lambda\mu\nu\sigma J_2 r^{-2}\right) -$$
$$- \frac{2\nu\left(1-q^2\right)}{(r+\nu)+(r-\nu)q^2}\left[2\lambda\mu\sigma r^{-2} + r\nu^{-1}\left(1-q^2\right)^{-1}q - \lambda\mu\nu\sigma J_1 r^{-5}\right],$$
$$J_1 = \mathrm{e}^{2rt} - 4rt\mathrm{e}^{rt} - 1 + 2rt + 2r^2t^2 + \frac{2}{3}r^3t^3,$$
$$J_2 = \mathrm{e}^{rt} - \mathrm{e}^{-rt} - 2rt.$$

126.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t |z(\tau) - \mu\tau z_t|^2\, d\tau\right\}|z_t\rangle =$$
$$= \frac{rq\exp(\nu t)}{\left(1-q^2\right)\left(AC-B^2\right)},$$

где μ – вещественное число,

$$A = (2\nu)^{-1}\left(1-\mathrm{e}^{-2rt}\right)^{-1}\left[(r+\nu) + (r-\nu)\mathrm{e}^{-2rt)}\right],$$
$$B = (r/\nu)\mathrm{e}^{-rt}\left(1-\mathrm{e}^{-2rt}\right)\left[1 + 2(\lambda\mu\nu\sigma/r^3)J_1\mathrm{e}^{-rt}\right],$$
$$C = \frac{1}{3}\lambda\mu^2\sigma - 4\left(\lambda\mu\sigma/r^2\right)\left(\mathrm{e}^{rt} - 1 - rt\right) - \frac{r-\nu}{2\nu} -$$
$$- \mu^2 J_2/(4\nu r^5) + \frac{r}{\nu}\left(1-\mathrm{e}^{-2rt}\right)^{-1}\left[1 + (2\lambda\mu\nu\sigma/r^3)J_1\mathrm{e}^{-rt}\right],$$
$$J_1 = \mathrm{e}^{rt} - 1 - rt - \frac{1}{2}r^2t^2,$$
$$J_2 = \mathrm{e}^{2rt} - 2(1+rt)\mathrm{e}^{rt} + 1 + 2rt + r^2t^2 + \frac{2}{3}r^3t^3.$$

127.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_t \langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t |z(\tau)|^2\, d\tau - \mu \left| \int\limits_0^t z(\tau)\, d\tau \right|^2 \right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \ Q(\lambda)[1+\mu R_\lambda]^{-1},$$

где μ – вещественное число,

$$R_\lambda \ = \ (2\nu\sigma r^{-3}) \left(r_+^2 \mathrm{e}^{rt} - r_-^2 \mathrm{e}^{-rt}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left[4\nu^2 - 2\nu r_+ \mathrm{e}^{rt} - 2\nu r_- \mathrm{e}^{-rt} + rt(r_+^2 \mathrm{e}^{rt} - r_-^2 \mathrm{e}^{-rt})\right].$$

128.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_{t_1+t_2} \langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda_1 \int\limits_0^{t_1} |z(\tau)|^2\, d\tau \ - \ \lambda_2 \int\limits_{t_1}^{t_1+t_2} |z(\tau)|^2\, d\tau \right\} |z_{t_1+t_2}\rangle \ =$$

$$= \ \frac{8\nu p_1 p_2 \rho_1 \rho_2 \exp\left(\nu t_1 + \nu t_2\right)}{(\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1)},$$

где

$$\rho_1 \ = \ \sqrt{\nu^2 + 2\lambda_1 \nu\sigma}, \qquad p_1 \ = \ \exp\left(-\rho_1 t_1\right),$$

$$\rho_2 \ = \ \sqrt{\nu^2 + 2\lambda_2 \nu\sigma}, \qquad p_2 \ = \ \exp\left(-\rho_2 t_2\right),$$

$$A_1 \ = \ (\nu+\rho_1) + (\nu-\rho_1)\, p_1^2, \qquad A_2 \ = \ (\nu+\rho_2) + (\nu-\rho_2)\, p_2^2,$$

$$B_1 \ = \ (\rho_1+\nu) + (\rho_1-\nu)\, p_1^2, \qquad B_2 \ = \ (\rho_2+\nu) + (\rho_2-\nu)\, p_2^2.$$

129.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2 z_{t_1+\Delta+t_2} \langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^{t_1} |z(\tau)|^2\, d\tau \ - \right.$$

$$\left. - \ \lambda_1 \int\limits_{t_1}^{t_1+\Delta} |z(\tau)|^2\, d\tau + \lambda_2 \int\limits_{t_1+\Delta}^{t_1+\Delta+t_2} |z(\tau)|^2\, d\tau \right\} |z_{t_1+\Delta+t_2}\rangle \ =$$

$$= \ \frac{8\nu p_1 p_2 \rho \rho_1 \rho_2 \exp\left(\nu t_1 + \nu\Delta + \nu t_2\right)}{\rho_1\,(1+p^2)\,(\rho_1 A_1 B_2 + \rho_2 A_2 B_1) + (1-p^2)\,(\rho_1\rho_2 A_1 A_2 - \rho^2 B_1 B_2)},$$

где

$$\rho \ = \ \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma}, \qquad \rho_1 \ = \ \sqrt{\nu^2 + 2\lambda_1\nu\sigma}, \qquad \rho_2 \ = \ \sqrt{\nu^2 + 2\lambda_2\nu\sigma},$$

$$p \ = \ \exp(-\rho\Delta), \qquad p_1 \ = \ \exp\left(-\rho_1 t_1\right), \qquad p_2 \ = \ \exp\left(-\rho_2 t_2\right),$$

$$A_1 \ = \ (\nu+\rho_1) + (\nu-\rho_1)\, p_1^2, \qquad A_2 \ = \ (\nu+\rho_2) + (\nu-\rho_2)\, p_2^2,$$

$$B_1 \ = \ (\rho_1+\nu) + (\rho_1-\nu)\, p_1^2, \qquad B_2 \ = \ (\rho_2+\nu) + (\rho_2-\nu)\, p_2^2.$$

130.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t d\tau_1 \ldots \int\limits_0^t d\,\tau_N \left|\sum_{n=1}^{n=N} \varepsilon_n z(\tau_n)\right|^2\right\} |z_t\rangle \;=$$

$$= \; Q(\lambda)(1+\Lambda_1\Lambda_2 J)^{-1},$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N$ – набор комплексных чисел,

$$\Lambda_1 \;=\; \lambda t \sum_{n=1}^{n=N} |\varepsilon_n|^2,$$

$$\Lambda_2 \;=\; \lambda \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{m=1}^{m=N} \varepsilon_n \varepsilon_m^* - \lambda \sum_{n=1}^{n=N} |\varepsilon_n|^2,$$

$$\rho \;=\; \sqrt{\nu^2 + 2\Lambda_1 \nu\sigma},$$

$$J \;=\; (4\nu^2\sigma/\rho^3)\,[(\rho+\nu)^2 \mathrm{e}^{\rho t} - (\rho-\nu)^2 \mathrm{e}^{-\rho t}]^{-1} \times$$

$$\times\, [2\nu - (\rho+\nu)\mathrm{e}^{\rho t} - (\rho-\nu)\mathrm{e}^{-\rho t} + 2\rho^2 t \mathrm{e}^{-\rho t}].$$

131.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{t+\Delta} \langle z_0|\, \exp\Bigg\{-\lambda \int\limits_0^{t+\Delta} |z(\tau) + z(\tau+\Delta)\exp(i\omega_z\Delta) \; +$$

$$+\; \beta(\tau)\exp(i\omega_\beta\tau - i\omega_z\tau) + \beta(\tau+\Delta) \times$$

$$\times \exp(i\omega_\beta\tau - i\omega_z\tau + i\omega_z\Delta)|^2\, d\tau \Bigg\} |z_{t+\Delta}\rangle \;=$$

$$= \; \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t |B(\tau)|^2\, d\tau\right\} \frac{4\rho\nu\exp(\nu t)}{\rho_+^2\exp(\rho t) - \rho_-^2\exp(-\rho t)} \times$$

$$\times \exp\Bigg\{\frac{\lambda^2\nu\sigma^2 R/\rho}{\rho_+^2\exp(\rho t) - \rho_-^2\exp(-\rho t)} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^t d\tau'\,[B(\tau)B^*(\tau') + B^*(\tau)B(\tau')] \; \times$$

$$\times\;\; [\rho_+\exp(\rho\tau) + \rho_-\exp(-\rho\tau)]\left[\rho_+^2\exp(\rho t - \rho\tau') + \rho_-^2\exp(-\rho\tau + \rho\tau')\right]\Bigg\},$$

где Δ, ω_z, ω_β – вещественные числа,

$$\rho \;=\; \sqrt{\nu^2 + \lambda\nu\sigma R}, \quad \rho_+ \;=\; \rho+\nu, \quad \rho_- \;=\; \rho-\nu, \quad R \;=\; 1 + \exp(-\nu\Delta)\cos(\omega_z\Delta),$$

$$B(\tau) \;=\; \frac{1}{2}\,[\beta(\tau) + \beta(\tau+\Delta)\exp\left(i\omega_\beta\Delta\right)]\exp\left(i\omega_\beta\Delta - i\omega_z\Delta\right).$$

132.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_T\, \langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^T \left| \sum_{m=1}^{M} \varepsilon_m z(\tau+\Delta_m)\right|^2 d\tau\right\} |z_T\rangle \;=$$

$$=\; Q(\lambda J_M),$$

где $\Delta_1,\ldots,\Delta_M$ – набор вещественных чисел,

$\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_M$ — набор комплексных чисел,

$$T \;=\; \max\{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_M\},$$

$$J_M \;=\; \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \varepsilon_m\varepsilon_n \exp\left(-\nu|\Delta_m-\Delta_n|\right).$$

133.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{M\Delta}\langle z_0|\exp\left\{-\lambda \int\limits_0^{M\Delta} \left| \sum_{m=1}^{M} \rho^m e^{im\omega\Delta} z(\tau+m\Delta)\right|^2 d\tau\right\} |z_{M\Delta}\rangle \;=$$

$$=\; Q(\lambda J_\Delta),$$

где ρ, ω, Δ – вещественные числа,

$$J_\Delta \;=\; \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{M} \rho^{m+m} e^{i(m-n)\omega\Delta} \exp(-\nu\Delta|m-n|).$$

134.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{t+\Delta}\langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t \left| \int\limits_0^\Delta \beta(\tau')z(\tau+\tau')\, d\tau'\right|^2 d\tau\right\} |z_{t+\Delta}\rangle \;=$$

$$=\; Q(\lambda J_\Delta),$$

где Δ – вещественное число,

$$J_\Delta \;=\; \int\limits_0^\Delta d\tau \int\limits_0^\Delta d\tau' \beta(\tau)\beta^*(\tau+\tau') \exp(-\nu|\tau-\tau'|).$$

135.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{t+\Delta}\langle z_0|\, \exp\left\{-\lambda \int\limits_0^t \left| \int\limits_0^\Delta \beta(\tau')\; z(\tau+\tau')\, d\tau'\right|^2 d\tau\right\} |z_{t+\Delta}\rangle \;=$$

$$=\; Q(\lambda J_\Delta),$$

где Δ – вещественное число,

$$J_\Delta \;=\; \int\limits_0^\Delta d\tau \int\limits_0^\Delta d\tau' \beta(\tau)\beta^*(\tau') \exp\left(-\nu|\tau-\tau'|\right).$$

136.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_t \langle z_0|\, \exp\left\{ i\lambda \int\limits_0^t \mathrm{Re}\big[z(\tau)z^*(t-\tau) \ + \ z^*(t-\tau)z(\tau)\big]\, d\tau \right\} |z_t\rangle \ =$$

$$= \ \frac{\rho_+ \exp(\nu t)}{\rho_+ \cosh(\rho_+ t) + \nu \sinh(\rho_+ t)} \frac{\rho_- \exp(\nu t)}{\rho_- \cosh(\rho_- t) + \nu \sinh(\rho_- t)},$$

где

$$\rho_+ \ = \ \sqrt{\nu^2 + 2i\lambda\nu\sigma}, \qquad \rho_- \ = \ \sqrt{\nu^2 - 2i\lambda\nu\sigma}.$$

137.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{T+\Delta} \langle z_0|\, \exp\left\{ -\lambda \int\limits_0^t [z(\tau)z^*(\tau+\Delta)+ \right.$$

$$\left. + \ z^*(\tau+\Delta)z(\tau)]\, d\tau \right\} |z_{t+\Delta}\rangle \ =$$

$$= \ Q\left(\tfrac{1}{2}\,[1+\exp(-\nu\Delta)]\right) Q\left(\tfrac{1}{2}\,[1-\exp(-\nu\Delta)]\right).$$

где Δ – вещественное число.

138.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\, w(z_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{T+\Delta} \langle z_0|\, \exp\left\{ -\lambda \int\limits_0^t \mathrm{Re}\Big[(z(\tau)+\beta(\tau))\times \right.$$

$$\left. \times(z^*(\tau+\Delta)+\beta^*(\tau+\Delta))\Big]\, d\tau \right\} |z_{T+\Delta}\rangle \ =$$

$$= \ Q_+(\lambda)Q_-(\lambda)\times$$

$$\times \exp\left\{ -\lambda \int\limits_0^t [\beta(\tau)\beta^*(\tau+\Delta] - \lambda^2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^t d\tau'\, [U_+(\tau,\tau') + U_-(\tau,\tau')] \right\},$$

где Δ – вещественное число,

$$Q_+(\lambda) \ = \ 4\nu\rho_+ \exp(\nu t)\, \left[(\rho_+ + \nu)^2 \exp(\rho_+ t) - (\rho_+ - \nu)^2 \exp(-\rho_+ t)\right]^{-1},$$

$$Q_-(\lambda) \ = \ 4\nu\rho_- \exp(\nu t)\, \left[(\rho_- + \nu)^2 \exp(\rho_- t) - (\rho_- - \nu)^2 \exp(-\rho_- t)\right]^{-1},$$

$$\rho_+ \ = \ \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma R_+}, \qquad R_+ \ = \ \frac{1}{2}\,[1+\exp(-\nu\Delta)],$$

$$\rho_- \ = \ \sqrt{\nu^2 + 2\lambda\nu\sigma R_-}, \qquad R_- \ = \ \frac{1}{2}\,[1-\exp(-\nu\Delta)],$$

$$a_+ \;=\; \frac{1}{2}\,[\beta(\tau)+\beta(\tau+\Delta)], \qquad a_- \;=\; \frac{1}{2}\,[\beta(\tau)-\beta(\tau+\Delta)],$$

$$U_+(\tau,\tau') \;=\; (2\nu\sigma R_+/\rho_+)\left[(\rho_++\nu)^2\exp{(\rho_+t)}-(\rho_+-\nu)^2\exp{(-\rho_+t)}\right]^{-1}\times$$

$$\times\;[(\rho_++\nu)\exp{(\rho_+t-\rho_+\tau')}+(\rho_+-\nu)\exp{(-\rho_+t+\rho_+\tau')}]\times$$

$$\times\,[(\rho_++\nu)\exp{(\rho_+\tau)}+(\rho_+-\nu)\exp{(\rho_+\tau)}]\left[a_+(\tau)a_+^*(\tau')+a_+^*(\tau)a_+(\tau')\right],$$

$$U_-(\tau,\tau') \;=\; (2\nu\sigma R_-/\rho_-)\left[(\rho_-+\nu)^2\exp{(\rho_-t)}-(\rho_--\nu)^2\exp{(-\rho_-t)}\right]^{-1}\times$$

$$\times\,[(\rho_-+\nu)\exp{(\rho_-t-\rho_-\tau')}+(\rho_--\nu)\exp{(-\rho_-t+\rho_-\tau')}]\times$$

$$\times\,[(\rho_-+\nu)\exp{(\rho_-\tau)}+(\rho_--\nu)\exp{(\rho_-\tau)}]\left[a_-(\tau)a_-^*(\tau')+a_-^*(\tau)a_-(\tau')\right].$$

139.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\,w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{_T}\langle z_0|\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^T\epsilon(t)\,|z(t)|^2\,dt\right\}|z_{_T}\rangle \;=$$

$$=\;\frac{2\nu\,(r_{_0}+r_{_T})\exp(\nu T)}{(r_0+\nu)\,(r_{_T}+\nu)\exp\left(R_{_{0,T}}\right)-(r_0-\nu)\,(r_{_T}-\nu)\exp\left(-R_{_{0,T}}\right)},$$

где $\epsilon(t)$ – произвольная неотрицательная функция,

$$r_0=\sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma\nu\epsilon(0)},\quad r_{_T}=\sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma\nu\epsilon(T)},\quad R_{_{0,T}}=\int\limits_0^T\sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma\nu\epsilon(t)}\,dt.$$

140.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_0\,w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2z_{_T}\langle z_0|\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^T\epsilon(t)\,|z(t)+\beta(t)|^2\,dt\right\}|z_{_T}\rangle \;=$$

$$=\;\frac{2\nu\,(r_{_0}+r_{_T})\exp(\nu T)}{(r_0+\nu)\,(r_{_T}+\nu)\exp\left(R_{_{0,T}}\right)-(r_0-\nu)\,(r_{_T}-\nu)\exp\left(-R_{_{0,T}}\right)}\times$$

$$\times\exp\left\{-\int\limits_0^T\epsilon(t)\,|\beta(t)|^2\,dt\;+\right.$$

$$+\;2\lambda^2\nu\sigma\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t d\tau\,\epsilon(t)\epsilon(\tau)r^{-1}(\tau)\,\mathrm{ch}R_{\tau,t}\,\mathrm{Re}\,[\beta(t)\beta^*(\tau)]\;+$$

$$+\;2\lambda^2\nu\sigma\left[(\nu r_0+\nu r_{_T})\;\mathrm{ch}R_{0,T}+(r_0r_{_T}+\nu^2)\;\mathrm{sh}R_{0,T}\right]^{-1}\times$$

$$\left.\times\int\limits_0^T dt\int\limits_0^T d\tau\,\epsilon(t)\epsilon(\tau)r^{-1}(\tau)\,\mathrm{Re}\,[\beta(t)\beta^*(\tau)]\right\}\times$$

$$\times\left[r_0\,\mathrm{ch}R_{0,t}+\nu\,\mathrm{sh}R_{0,t}\right]\left[r_\tau\,\mathrm{ch}R_{\tau,T}+\nu\,\mathrm{sh}R_{\tau,T}\right]\Bigg\},$$

где $\epsilon(t)$ – произвольная неотрицательная функция,

$r_0=\sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma\nu\epsilon(0)}$, $\quad r_T=\sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma\nu\epsilon(T)}$, $\quad r_t\equiv r(t)=\sqrt{\nu^2+2\lambda\nu\sigma\epsilon(t)}$,

$R_{\tau,t}=\int\limits_\tau^t\sqrt{\nu^2+2\lambda\sigma\nu\epsilon(t')}\,dt'$.

141.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^2z_u\langle z_0|\,\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^u V(z(\tau))\,d\tau\right\}|z_u\rangle\langle z_u|\,\exp\left\{-\lambda\int\limits_u^t V(z(\tau))\,d\tau\right\}|z_t\rangle\;=$$

$$=\;\langle z_0|\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t V(z(\tau))\,d\tau\right\}|z\rangle.$$

142.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^2z_0\,w(z_0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^2z_{t+\Delta}\;\langle z_0|\,G\left\{-\lambda\int\limits_u^t V(z(\tau))\,d\tau\right\}\,|z_{t+\Delta}\rangle\;=$$

$$=\;\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^2z_u\,w(z_u)\int\limits_{-\infty}^{\infty}d^2z_t\,\langle z_0|\,G\left\{-\lambda\int\limits_u^t V(z(\tau))\,d\tau\right\}|z_t\rangle,$$

где $0\le u\le t\le(t+\Delta)$, $\quad G(\eta)$ – произвольная локально интегрируемая функция.

143.

$$\langle z_\tau|\,\exp\left\{-\lambda\int\limits_\tau^t V(z(\tau'))\,d\tau'\right\}|z_t\rangle\;=\;\Psi\,(z_t,t;z_\tau,\tau),$$

где функция $\Psi\;=\;\Psi\,(z_t,t;z_\tau,\tau)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi\;=\;\nu\frac{\partial}{\partial z}(z\Psi)+\nu\frac{\partial}{\partial z^*}(z^*\Psi)+2\nu\sigma\frac{\partial^2}{\partial z\partial z^*}\Psi-\lambda V(z)\Psi$$

с начальным условием $\Psi\,(z_t,\tau;\,z_\tau,\tau)\;=\;\delta^{(2)}(z_t-z_\tau)$.

144.

$$\langle z_0|\,\exp\left\{-\lambda\int\limits_0^t V(z(\tau))\,d\tau\right\}|z_t\rangle\;=$$

$$=\;\lim_{M\to\infty}\langle z_0|\exp\left\{-\lambda\sum_{m=0}^{m=M+1}\;\int\limits_{m\Delta}^{(m+1)\Delta}V(z(\tau))\,d\tau\right\}|z_t\rangle,$$

где $\Delta=t/M$.

Литература

1. Мазманишвили А.С. Некоторые континуальные интегралы от гауссовых форм / Препринт ХФТИ. Харьков, 1985, № 85-18. – 45 с.

2. Мазманишвили А.С. Континуальное интегрирование как метод решения физических задач / А.С. Мазманишвили. – К.: Наукова думка, 1987. – 224 с.

3. Петров В.А. Интегралы по гауссовым мерам от специальных функционалов. Мера Винера. Условная мер Винера / Препринт АН БССР, Институт математики. Минск, 1986, № 28. – 34 с.

4. Петров В.А. Интегралы по гауссовым от специальных функционалов. Меры с корреляционными функциями вида $f_1(\min(t,s))$, $f_2(\max(t,s))$ / Препринт АН БССР, Институт математики. Минск, 1987, № 29. – 47 с.

5. Петров В.А. Интегралы по гауссовым от специальных функционалов. Квадратичный функционал общего вида в показателе экспоненты / Препринт АН БССР, Институт математики. Минск, 1987, № 23. – 36 с.

6. Петров В.А. Интегралы по гауссовым с корреляционными функциями вида $p(\min(t,s))$, $q(\max(t,s))$ от экспоненты с квадратичным функционалом общего вида в показателе. Производные Радона–Никодима / Препринт АН БССР, Институт математики. Минск, 1987, № 22. – 24 с.

TABLE OF PATH INTEGRALS DEFINED ON STOCHASTIC COMPLEX-VALUED ORNSTEIN-UHLENBECK PROCESS

A.S. Mazmanishvili

Sumy State University,
Rimsky-Korsakov St., 2, Sumy, Ukraine, e-mail:mazmanishvili@gmail.com

Abstract. The work represents the table of more than 140 path integrals defined on the stochastic complex-valued scalar Ornstein-Uhlenbeck process. They are integrals of corresponding Gaussian forms. This fact permits to reduce them to analytical form of path integrals which are contain the average on trajectories of the normal Markov complex-valued Ornshtein-Uhlenbeck process. Formulas obtained may be useful in the solving of various applied statistical problems.

Key words: integrals on trajectories, random Ornshtein-Uhlenbeck process, gaussian forms.

УДК 517.2

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ШВАРЦА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ ПО ДУГЛИСУ

В.Г. Николаев

Новгородский Государственный университет,
Институт электронных и информационных систем,
ул. Большая Санкт-Петербургская, 41, Новгород, 173003, Россия, e-mail:vg14@inbox.ru

Аннотация. Статья посвящена вопросу о единственности решения однородной задачи Шварца для вектор-функций, аналитических по Дуглису. Построены два примера матриц, для которых единственность не имеет места и приведены два класса матриц, для которых решение единственно.

Ключевые слова: вектор-функция, матрица, собственное число, собственный вектор, голоморфность, замкнутый контур, частная производная.

Настоящая статья посвящена исследованию задачи Шварца для функций, аналитических по Дуглису. Сначала несколько вводных замечаний. Всюду для краткости будем обозначать ϕ_x и ϕ_y частные производные функции $\phi(x, y)$ по x и по y соответственно. Также обозначим $p\big|_\Gamma$ сужение функции $p(x, y)$ на контур Г. Символ $\operatorname{Re}\phi$ обозначает реальную часть функции ϕ.

Определение 1. *Пусть комплексная n-вектор-функция $\phi(x, y)$ двух вещественных переменных x, y имеет в области G первые частные производные по x и по y и J – $n \times n$-матрица, все собственные числа которой лежат в верхней полуплоскости. Пусть в области G выполнено равенство*

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - J \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Тогда функцию ϕ назовем аналитической по Дуглису, или J-аналитической в области G.

Как показано в [1], условия (1) достаточно для аналитичности функции ϕ. При этом не нужно требовать даже непрерывности первых частных производных.

Нелишне отметить, что аналитические по Дуглису функции широко применяются при исследовании решений краевых задач для эллиптических уравнений в частных производных [1], поэтому их изучение представляет большой самостоятельный интерес.

1. Сформулируем задачу Шварца. Пусть область G ограничена гладким контуром Г. Требуется найти J-аналитическую в области G функцию $\phi(z)$, которая непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ и удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re}\phi\big|_\Gamma = f\,, \tag{2}$$

где вещественная вектор-функция $f \in C(\Gamma)$ задана.

Наше дальнейшее исследование будет посвящено вопросу единственности задачи Шварца, то есть для каких матриц J однородная ($f = 0$) задача (2) имеет только постоянные решения.

2. Сделаем некоторые вспомогательные замечания.

Определение 2. *Пусть скалярная комплексная функция $\phi(x, y)$ двух вещественных переменных x, y имеет в области G первые частные производные по x и по y. Обозначим $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$ комплексное число, лежащее в верхней полуплоскости. В случае скалярной матрицы $J = \lambda$ функцию ϕ в определении 1 назовем λ-голоморфной в области G,. В этом случае она удовлетворяет уравнению*

$$\phi_y - \lambda \cdot \phi_x = 0 \tag{3}$$

для всех точек $(x, y) \in G$.

При $\lambda = i$ эта функция совпадает с обычной голоморфной.

Ниже мы будем использовать следующее очевидное свойство J-аналитических функций, которое вытекает непосредственно из их определения: сумма и разность двух J-аналитических функций есть функция J-аналитическая.

Известно [2], что обычная голоморфная функция (то есть при $\lambda = i$) равна константе, если ее вещественная часть на замкнутом контуре $\Gamma \subset G$ равна нулю. Покажем, что это верно и для произвольного λ, то есть *однородная задача Шварца имеет единственное решение для скалярных λ-голоморфных функций.*

Предложение 1. *Пусть скалярная функция $\phi = u(x, y) + iv(x, y)$ λ-голоморфна в области G и пусть замкнутый контур $\Gamma \subset G$. Тогда если числа a, b вещественны, причем $au + bv\big|_\Gamma = 0$, то ϕ является константой.*

□ Применим неособенную подстановку

$$\begin{cases} x_1 = x + \lambda_1 y\,, \\ y_1 = \lambda_2 y, \ \ \lambda_2 > 0 \end{cases} \tag{4}$$

для λ-голоморфной функции (3). Тогда

$$\begin{cases} \phi_y = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dy} + \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dy} = \lambda_2 \cdot \phi_{y_1} + \lambda_1 \cdot \phi_{x_1}\,, \\[2ex] \phi_x = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dx} = 0 + 1 \cdot \phi_{x_1}\,. \end{cases}$$

Подставив эти равенства в (3), имеем:

$$\lambda_2 \cdot \phi_{y_1} + \lambda_1 \cdot \phi_{x_1} - (\lambda_1 + \lambda_2 i)\phi_{x_1} =$$

$$= \lambda_2 \cdot \phi_{y_1} + \lambda_1 \cdot \phi_{x_1} - \lambda_1 \phi_{x_1} - \lambda_2 i \phi_{x_1} = \lambda_2 \cdot \phi_{y_1} - \lambda_2 i \phi_{x_1} = 0,$$

или, сокращая на $\lambda_2 > 0$, $\phi_{y_1} - i\phi_{x_1} = 0$. Таким образом, в новых переменных x_1, y_1 функция $\phi = u + iv$ является обычной голоморфной. При этом $au(x_1, y_1) + bv(x_1, y_1)\big|_{\Gamma'} = 0$ на другом замкнутом контуре Γ', получаемом из Γ путем преобразования (4). Следовательно, ϕ есть константа в новых переменных x_1, y_1, а поэтому в силу обратимости (4) и в старых переменных x, y. ■

3. Приведём примеры матриц, для которых решение однородной задачи Шварца неединственно.

Как нетрудно видеть, однородная ($f = 0$) задача Шварца всегда имеет решение, являющееся вектор-константой. Приведем две такие матрицы и соответствующие им вектор-функции, для которых однородная задача Шварца имеет еще и другое решение, не совпадающее с константой.

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$J = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 2 & 3i \end{pmatrix}$$

Ее собственные числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = i$. Теперь пусть

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 + ixy \\ (x^2 + y^2)i \end{pmatrix}.$$

Как нетрудно видеть, $\mathrm{Re}\,\phi\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma:\ \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$, но при этом $\phi \neq \mathrm{const}$. Легко также проверить, что предъявленная функция ϕ действительно является J-голоморфной, то есть удовлетворяет равенству $\phi_y = J \cdot \phi_x$ из определения 1.

Пример 2. Рассмотрим матрицу, имеющую *различные* собственные числа $\lambda = i$ и $\mu = 2i$:

$$J = \begin{pmatrix} 4i & 3 \\ 2 & -i \end{pmatrix}.$$

Функция ϕ будет следующей:

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 + 4y^2 - 1 - 2xyi \\ -i(x^2 + 2y^2) \end{pmatrix}.$$

Имеем: $\mathrm{Re}\,\phi\big|_\Gamma = 0$ на эллипсе $\Gamma:\ \frac{1}{2}x^2 + 4y^2 = 1$, но при этом $\phi \neq \mathrm{const}$.
Непосредственно показывается, что $\phi_y = J \cdot \phi_x$ согласно определению 1.

4. Рассмотрим некоторые классы 2×2-матриц, для которых решение однородной задачи Шварца единственно. Перейдем к поиску таких матриц. При этом мы будем использовать предложение 1.

Прежде всего, единственность имеет место для треугольных и диагональных матриц, что довольно очевидно. Действительно, если

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \xi & \mu \end{pmatrix},$$

где ξ – произвольно, а числа λ и μ лежат в верхней полуплоскости, то равенство (1) имеет вид

$$\left(\begin{array}{c} p+iq \\ u+iv \end{array}\right)_y - \left(\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ \xi & \mu \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} p+iq \\ u+iv \end{array}\right)_x = 0, \quad (x,y) \in G,$$

Пусть $p\big|_\Gamma = u\big|_\Gamma = 0$ на замкнутом контуре $\Gamma \subset G$. На основании первой строки последнего равенства видим, что $p+iq$ – это λ-голоморфная функция, согласно определению 2. Отсюда по предложению 1 условие $p\big|_\Gamma = 0$ означает, что $p+iq \equiv \mathrm{const}$. Следовательно, функция $u+iv$ удовлетворяет (3), то есть является μ-голоморфной. Поэтому если $u\big|_\Gamma = 0$, то $u+iv \equiv \mathrm{const}$, согласно тому же предложению 1. Итак, ϕ есть вектор-константа, что и требовалось. Как нетрудно видеть, совершенно аналогичная ситуация будет и для верхнетреугольных матриц.

Таким образом, нас в дальнейшем будут интересовать только нетреугольные матрицы. В приведенных ниже двух теоремах мы выделяются классы матриц, для которых однородная задача (2) имеет единственное решение.

Теорема 1. *Пусть 2-вектор-функция $\phi(x,y)$ является J-аналитической области G с нетреугольной 2×2-матрицей J, причем J имеет единственное собственное число λ, лежащее в верхней полуплоскости и вещественный собственный вектор. Тогда условие $\operatorname{Re}\phi\big|_\Gamma = 0$ на замкнутом контуре $\Gamma \subset G$ означает, что ϕ равна вектор-константе.*

□ Сразу отметим, что собственный вектор матрицы J может быть выбран вещественным, то есть имеющим вещественные компоненты.

Обозначим E единичную матрицу и пусть $\overline{y} \neq 0$ – некоторый 2-вектор. Рассмотрим матрицу B, столбцами которой являются векторы $\overline{y}$ и $\overline{x} = (J-\lambda E)\overline{y}$, то есть $B = (\overline{y}, \overline{x})$. Как несложно показать, если векторы $\overline{y}, \overline{x}$ – ненулевые, то $\det B \neq 0$.

Действительно, пусть $\alpha\overline{x}+\beta\overline{y} = \alpha(J-\lambda E)\overline{y}+\beta\overline{y} = 0$, где α и β – произвольные числа. Умножим это равенство на $(J-\lambda E)$, тогда будем иметь: $\alpha(J-\lambda E)^2\overline{y}+\beta(J-\lambda E)\overline{y} = 0$. Следовательно, $\beta(J-\lambda E)\overline{y} = 0$, так как $(J-\lambda E)^2 = 0$ по теореме Кэли-Гамильтона. Но по условию $(J-\lambda E)\overline{y} \neq 0$, поэтому $\beta = 0$. Таким образом из первого равенства $\alpha(J-\lambda E)\overline{y} = 0$, откуда $\alpha = 0$, так как $(J-\lambda E)\overline{y} \neq 0$. Итак, $\alpha = \beta = 0$, что по определению и означает линейную независимость векторов $\overline{y}$ и $\overline{x}$.

По уже упомянутой теореме Кэли-Гамильтона $(J-\lambda E)^2 = 0$. Вычислим $J\overline{x} = J(J-\lambda E)\overline{y} = (J-\lambda E+\lambda E)(J-\lambda E)\overline{y} = (J-\lambda E)^2\overline{y}+\lambda E(J-\lambda E)\overline{y} = \lambda\overline{x}$, то есть вектор $\overline{x}$ является собственным. Кроме того, $J\overline{y} = (J-\lambda E+\lambda E)\overline{y} = (J-\lambda E)\overline{y}+\lambda\overline{y} = \overline{x}+\lambda\overline{y}$.

Далее заметим, что поскольку

$$B^{-1}\cdot B = B^{-1}\cdot(\overline{y},\overline{x}) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right),$$

то

$$B^{-1}\overline{y} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right), \quad B^{-1}\overline{x} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right).$$

Учитывая вышесказанное, вычислим

$$B^{-1}JB = B^{-1}J(\overline{y},\overline{x}) = B^{-1}(J\overline{y}, J\overline{x}) = B^{-1}(\lambda\overline{y}+\overline{x}, \lambda\overline{x}) =$$

$$= \left(B^{-1}\lambda\overline{y} + B^{-1}\overline{x}, B^{-1}\lambda\overline{x}\right) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = J'.$$

Итак, $B^{-1}JB = J'$, где J' – нижнетреугольная жорданова клетка. Отметим, что векторы $\overline{y}$ и $\overline{x}$ принято называть жордановым базисом матрицы J.

Обозначим исходную матрицу

$$J = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

тогда

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Присоединенный вектор $\overline{y}$ мы можем выбрать любым, лишь бы при этом выполнялось условие $\det\left(\overline{y},\overline{x}\right) \neq 0$. Положим

$$\overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим

$$B = (\overline{y},\overline{x}) = [\overline{y},(J-\lambda E)\overline{y}] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{11}-\lambda \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+bi \\ 0 & k(a+bi) \end{pmatrix},$$

где $a+bi \neq 0$ – комплексное число, k – вещественно, $k \neq 0$, так как по условию собственный вектор $\overline{x}$ кратен вещественному и $a_{21} \neq 0$ (матрица J – нетреугольна).

Пусть $\phi(x,y)$ – произвольная J-аналитическая функция в области G. Поскольку $B^{-1}JB = J'$, то $J = BJ'B^{-1}$, откуда

$$\left(B^{-1}\phi\right)_y - J\cdot\left(B^{-1}\phi\right)_x = 0\,. \tag{5}$$

Обозначим

$$B^{-1}\phi = \begin{pmatrix} p+iq \\ u+iv \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где p,q,u,v – вещественные функции переменных x и y. Тогда, в силу (5),

$$\begin{pmatrix} p+iq \\ u+iv \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} p+iq \\ u+iv \end{pmatrix}_x = 0. \tag{7}$$

На основании (6)

$$\phi = B\cdot\begin{pmatrix} p+iq \\ u+iv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+au-bv+(q+av+bu)i \\ k(au-bv)+(kav+kbu)i \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Пусть $\mathrm{Re}\,\phi\big|_\Gamma = 0$ на замкнутом контуре $\Gamma \subset G$. Тогда с учетом (8)

$$\begin{cases} p+au-bv\big|_\Gamma = 0, \\ k(au-bv)\big|_\Gamma = 0, \quad k \neq 0, \end{cases} \tag{9}$$

то есть $p\big|_\Gamma = 0$. При этом первая строка (7) представляет собой равенство $(p+iq)_y - \lambda(p+iq)_x = 0$, то есть функция $p+iq$ является λ-голоморфной. Поэтому, согласно предложению 1, $p+iq \equiv \text{const}$.

Здесь заметим, что если бы вектор $\overline{x}_\lambda$ не был кратным вещественному, то вторая строка (9) не была бы пропорциональна $au - bv$ и равенство $p\big|_\Gamma = 0$ мы бы не получили. *В этом месте используется вещественность вектора* $\overline{x}$.

Таким образом, вторую строку (7) можно переписать в виде

$$(u+iv)_y - \lambda(u+iv)_x = \frac{d}{dx}(\text{const}) = 0,$$

в силу чего функция $u+iv$ так же λ-голоморфна. Но согласно (9) $k(au-bv)\big|_\Gamma = 0$, откуда, в силу того же предложения 1, $u+iv \equiv \text{const}$. Таким образом, ϕ является 2-вектор-константой, что и требовалось. ■

Теперь возникает справедливый вопрос: что будет, если матрица J имеет разные собственные числа? Покажем, что имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть 2×2-матрица J имеет различные собственные числа $\lambda \neq \mu$, лежащие в верхней полуплоскости, и хотя бы один вещественный собственный вектор. Тогда однородная задача Шварца имеет единственное решение.*

□ Доказательство использует, с некоторой модификацией, схему доказательства предыдущей теоремы. Пусть

$$\overline{y}_\mu = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{x}_\lambda = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$$

– собственные векторы матрицы J, соответствующие различным собственным числам $\mu \neq \lambda$, причем k – вещественное число, *то есть вектор $\overline{x}_\lambda$ – вещественный,* а число c в общем случае комплексное. (Как известно, собственный вектор определен с точностью до множителя, поэтому не умаляя общности можно каждый из них записать в приведенном выше виде).

Составим матрицу B, столбцами которой будут векторы $\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda$ и $\overline{x}_\lambda$, то есть

$$B = (\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda, \overline{x}_\lambda) = \begin{pmatrix} c-k & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где числа a, b, k – вещественные.

Поскольку $B^{-1}\cdot B = B^{-1}\cdot(\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda, \overline{x}_\lambda) = E$, то

$$B^{-1}(\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1}\overline{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$B^{-1}\overline{y}_\mu = B^{-1}(\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda) + B^{-1}\overline{x}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $J\overline{x}_\lambda = \lambda x_\lambda$, $J\overline{y}_\mu = \mu y_\mu$, так как векторы $\overline{x}_\lambda$, $\overline{y}_\mu$ – собственные по условию. С учетом вышесказанного

$$B^{-1}JB = B^{-1}J(\overline{y}_\mu - \overline{x}_\lambda, \overline{x}_\lambda) = B^{-1}(J\overline{y}_\mu - J\overline{x}_\lambda, J\overline{x}_\lambda) =$$

$$= B^{-1}(\mu\overline{y}_\mu - \lambda\overline{x}_\lambda, \lambda\overline{x}_\lambda) = \left[\mu B^{-1}\overline{y}_\mu - \lambda B^{-1}\overline{x}_\lambda, \lambda B^{-1}\overline{x}_\lambda\right] =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \mu - \lambda & \lambda \end{pmatrix} = J'.$$

Итак, $B^{-1}JB = J'$, где J' – нижнетреугольная матрица. Теперь используем схему доказательства теоремы 1.

Пусть произвольная функция $\phi(x, y)$ является J-аналитической в области G. Так как $B^{-1}JB = J'$, то $J = BJ'B^{-1}$. Поэтому с учетом (1) $\phi_y - BJ'B^{-1}\phi_x = 0$, откуда

$$(B^{-1}\phi)_y - J'(B^{-1}\phi)_x = 0. \tag{10}$$

Обозначим

$$B^{-1}\phi = \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где p, q, u, v – вещественные функции переменных x и y. Тогда в силу (10)

$$\begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ \mu - \lambda & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix}_x = 0. \tag{12}$$

Согласно (11)

$$\phi = B \cdot \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p + iq \\ u + iv \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ap - bq + ku + (aq + bp + kv)i \\ u + iv \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Пусть $\mathrm{Re}\,\phi\big|_\Gamma = 0$, где замкнутый контур $\Gamma \subset G$. Тогда с учетом (13) имеем:

$$\begin{cases} ap - bq + ku\big|_\Gamma = 0, \\ u\big|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{14}$$

то есть $ap - bq\big|_\Gamma = 0$. При этом первая строка (12) означает согласно (3), что $p + iq$ представляет собой μ-голоморфную функцию. Поэтому, с учетом предложения 1, $p + iq \equiv \mathrm{const}$. Здесь отметим, что если бы число k было комплексным, то в первом уравнении (14) фигурировала бы функция v, и данная схема не сработала бы. *В этом месте мы использовали то, что вектор $\overline{x}$ – вещественный.*

Расписывая теперь нижнюю строку (12), имеем:

$$(u+iv)_y - \lambda(u+iv)_x = \frac{d}{dx}((\mu-\lambda)\cdot \mathrm{const}) = 0,$$

то есть $u+iv$ будет λ-голоморфной. В силу этого условие $u\big|_{\Gamma} = 0$ в (14) означает согласно тому же предложению 1, что $u+iv \equiv \mathrm{const}$.

Итак, функция $\phi(x,y)$ является вектор-константой, что и требовалось доказать. ■

Отметим в заключение, что условие $k \neq 0$ в определении вещественного собственного вектора $\overline{x}_\lambda = (k,1)$ нами никак не использовалось, поэтому возможен случай, когда $\overline{x}_\lambda = (0,1)$. Однако же если $\overline{x}_\lambda = (1,0)$, то тогда по определению собственного вектора имеем равенство $(J-\lambda E)\cdot \overline{x}_\lambda = 0$, то есть

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $a_{11}-\lambda = 0$, $a_{21} = 0$, то есть матрица J – верхнетреугольная, а такой случай мы уже рассмотрели выше. По аналогии, $k=0$ в векторе $\overline{x}_\lambda$ в теореме 2 соответствует нижнетреугольной матрице J.

Литература

1. Солдатов А.П. Функции, аналитические по Дуглису / А.П. Солдатов. – Издательство НовГУ, 1995. – 196 с.

2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ / В.В. Шабат. – М.: Наука, 1983. – 578 с.

3. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной / А.Г. Свешников. – М.: Наука, 1988. – 334 с.

ABOUT SOLUTION UNIQUENESS OF SCHWARTZ PROBLEM FOR FUNCTIONS WITH DUGLIS ANALYTICITY

V.G. Nikolaev

,

Bolshaya Sankt-Peterburgskaya, 41, Novgorod, 173003, Russia, e-mail:vg14@inbox.ru

Abstract. The article is devoted the study of solution uniqueness of the Schwarz homogeneous problem connected with vector-valued functions being analytic on Douglis. Two examples of matrices for which there is not solution uniqueness are built and also two matrix classes are given for which the problem solution is unique.

Key words: vector-function, matrix, eigenvalue, eigenvector, holomorphic property, closed contour, partial derivative.

УДК 517.983

О СВОЙСТВАХ ВЕСОВЫХ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ МАЛЬМСТЕНА [4]

А.В. Глушак, О.А. Покручин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: e-mail:Glushak@bsu.edu.ru,
pokru4in.oleg@yandex.ru

Аннотация. Установлены формулы, связывающие решение весовых задач Коши для абстрактного дифференциального уравнения Мальмстена с операторной функцией Бесселя и проинтегрированной косинус-оператор-функцией.

Ключевые слова: весовые задачи Коши, проинтегрированная косинус-оператор-функция, операторная функция Бесселя.

Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело к понятию проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной косинус-оператор-функции (в дальнейшем ПКОФ). В работах [1, 2] приводятся формулы, связывающие ПКОФ $C_{k/2}(t)$ с операторной функцией Бесселя (ОФБ) $Y_k(t)$ – разрешающим оператором задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t)\,, \qquad t > 0\,, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = 0\,. \tag{2}$$

В уже процитированных работах [1, 2] приводится и определение ПКОФ, и формула связи ОФБ $Y_k(t)$ с ПКОФ $C_{k/2}(t)$, имеющая вид

$$Y_{2\alpha}(t)u_0 = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1/2)}{\sqrt{\pi}t^\alpha}\left(C_\alpha(t)u_0 - \int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau)C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau\right), \tag{3}$$

где $P_{\alpha-1}(\tau)$ — сферическая функция Лежандра [3, с. 202], $\alpha > 0$.

В работе [4] было показано, что ОФБ и ПКОФ могут быть использованы и для построения решений весовых задач Коши для уравнения Мальмстена [5, с. 113]. По сравнению с [4], в настоящей работе доказаны утверждения о единственности решения рассматриваемых задач и исследованы дальнейшие свойства уравнения Мальмстена.

[4]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613).

1. Первая весовая задача Коши. Пусть E – банахово пространство, A – оператор, действующий в E, с областью определения $D(A)$. Рассмотрим следующую весовую задачу Коши для уравнения Мальмстена

$$u''(t)+\frac{k}{t}u'(t)+\frac{l}{t^2}u(t)=t^mAu(t)\,,\qquad t>0\,, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to 0}\left(t^{(k-1-\nu(m+2))/2}u(t)\right)=u_0\,, \tag{5}$$

где параметр $\nu=\dfrac{\sqrt{(k-1)^2-4l}}{m+2}\geq 0$.

Отметим сразу, что при сделанных предположениях, для рассматриваемого дифференциального уравнения второго порядка (4) не ставится ("снимается") второе начальное условие при $t=0$, что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах при $t=0$.

Определение 1. *Решением задачи (4), (5) называется функция $u(t)$, которая при $t>0$ дважды непрерывно дифференцируема, принимает значения, принадлежащие $D(A)$, и удовлетворяет уравнению (4) и условию (5).*

Разрешающий оператор задачи (4), (5) будем обозначать $Y^m_{k,l}(t)$, а множество операторов A, для которых задача (4), (5) однозначно разрешима, обозначим через $G^m_{k,l}$. Наряду с этим множеством рассмотрим множество G_k операторов A, для которых однозначно разрешима задача Коши для уравнения ЭПД (1), (2).

Теорема 1. *Пусть $\nu\geq 0$, $m>-2$, $u_0\in D(A)$ и оператор $A\in G_{2\nu+1}$. Тогда $A\in G^m_{k,l}$, т.е., задача (4), (5) однозначно разрешима, ее решение представимо в виде*

$$u(t)\equiv Y^m_{k,l}(t)u_0=t^{(1-k+\nu(m+2))/2}Y_{2\nu+1}(\tau)u_0\,, \tag{6}$$

и при этом справедлива оценка

$$\|Y^m_{k,l}(t)\|\leq Mt^{(1-k+\nu(m+2))/2}e^{\omega\tau}\,, \tag{7}$$

где $\tau=\dfrac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}$, ω — показатель роста ОФБ $Y_{2\nu+1}(\tau)$, $M\geq 1$.

□ Подстановкой $u(t)=t^{(1-k+\nu(m+2))/2}w(\tau)$ задача (4), (5) сводится к следующей задаче:

$$w''(\tau)+\frac{2\nu+1}{\tau}w'(\tau)=Aw(\tau)\,, \tag{8}$$

$$w(0)=u_0\,. \tag{9}$$

Из (8), (9) следует представление (6) и оценка (7), поскольку для ОФБ $Y_{2\nu+1}(t)$ имеет место оценка (см. [6])

$$\|Y_{2\nu+1}(\tau)\|\leq Me^{\omega\tau}\,. \tag{10}$$

Справедливость начального условия (5) вытекает из условий (2), которым удовлетворяет функция $Y_{2\nu+1}(\tau)u_0$.

Методом от противного докажем единственность решения задачи (8), (9). Пусть $w_1(\tau)$ и $w_2(\tau)$ — два решения задачи (8), (9). Рассмотрим функцию двух переменных $v(\tau,s) = f(Y_{2\nu+1}(s)(w_1(\tau) - w_2(\tau)))$, где $f \in E^*$ (E^* — сопряженное пространство), $\tau, s \geq 0$. Она очевидно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{2\nu+1}{\tau}\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{2\nu+1}{s}\frac{\partial v}{\partial s} \tag{11}$$

и условиям

$$v(0,s) = \frac{\partial v(t,0)}{\partial s} = 0\,. \tag{12}$$

Истолкуем $v(\tau,s)$ как обобщенную функцию умеренного роста и применим к (11), (12) преобразование Фурье-Бесселя (см. [7]) по переменной s. Для образа $V(\tau,\lambda)$, $\lambda \geq 0$ получим следующую задачу

$$\frac{\partial^2 V(\tau,\lambda)}{\partial \tau^2} + \frac{2\nu+1}{\tau}\frac{\partial V(\tau,\lambda)}{\partial \tau} = -\lambda^2 V(\tau,\lambda)\,, \tag{13}$$

$$V(0,\lambda) = 0\,. \tag{14}$$

Общее решение уравнения (13) имеет вид

$$V(\tau,\lambda) = \tau^{-\nu}(\xi_1(\lambda)J_{-\nu}(\lambda\tau) + \xi_2(\lambda)N_{-\nu}(\lambda\tau))\,,$$

где $J_\nu(\cdot)$ – функция Бесселя, $N_\nu(\cdot)$ – функция Неймана. Так как функция Бесселя $J_{-\nu}(\lambda\tau)$ при $\tau \to 0$ имеет порядок $\tau^{-\nu}$ и $\nu > 0$, то необходимо $\xi_1(\lambda) = 0$. Функция Неймана $N_{-\nu}(\lambda\tau)$ при $\tau \to 0$ имеет порядок τ^ν, поэтому из (14) следует $\xi_2(\lambda) = 0$. Следовательно, $v(\tau,s) \equiv 0$ для любого $s \geq 0$. В силу произвольности функционала $f \in E^*$ при $s = 0$ получаем равенство $w_1(\tau) \equiv w_2(\tau)$ и единственность решения установлена. ■

Замечание 1. При $m > -1$ решение (6) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to 0}(t^{(k-1-\nu(m+2))/2}u(t))' = 0\,.$$

Для проверки этого факта воспользуемся формулой (см. [6])

$$Y_k'(t)u_0 = \frac{t}{k+1}Y_{k+2}(t)Au_0\,.$$

Будем иметь

$$(t^{(k-1-\nu(m+2))/2}u(t))' = (Y_{2\nu+1}(\tau)u_0)'_t = t^{m/2}Y'_{2\nu+1}(\tau)u_0 = \frac{2}{(m+2)(2\nu+2)}t^{m+1}Y_{2\nu+3}(\tau)Au_0\,.$$

Поскольку по условию замечания $m > -1$, то требуемое соотношение выполнено.

Замечание 2. При $l = m = 0$, $k \geq 1$ задача (4), (5) превращается в задачу (1), (2). Условие $u'(0) = 0$ в этом случае может быть снято.

Теорема 2. *Пусть* $\nu \geq 0$, $m > -2$, $u_0 \in D(A)$, *оператор* $A \in G_{k,l}^m$ *и для* $Y_{k,l}^m(t)$ *справедлива оценка* (7). *Тогда* $A \in G_{2\nu+1}$, *т.е., задача* (1), (2) *при* $k = 2\nu+1$ *однозначно разрешима и ее решение представимо в виде*

$$u(t) \equiv Y_{2\nu+1}(t)u_0 = \left(\frac{m+2}{2}t\right)^{(k-1-\nu(m+2))/(m+2)} Y_{k,l}^m\left(\left(\frac{m+2}{2}t\right)^{2/(m+2)}\right)u_0\,. \tag{15}$$

☐ Подстановкой

$$u(t) = s^{(k-1-\nu(m+2))/2}w(s), \quad s = \left(\frac{m+2}{2}t\right)^{2/(m+2)}$$

задача (1), (2) сводится к следующей задаче:

$$w''(s) + \frac{k}{s}w'(s) + \frac{l}{s^2}w(s) = s^m Aw(s)\,, \tag{16}$$

$$\lim_{s\to 0}\left(s^{(k-1-\nu(m+2))/2}w(s)\right) = u_0\,. \tag{17}$$

Из (16), (7) следует однозначная разрешимость задачи (1), (2) и представление (15) для $u(t)$, а из оценки (7) – оценка (10). ☐

Теорема 3. *Пусть* $\nu \geq 0$, $m > -2$, $u_0 \in D(A)$. *Тогда* $G_{2\nu+1} = G_{k,l}^m$.

☐ Справедливость теоремы 3 вытекает из теорем 1 и 2. ■

2. Вторая весовая задача Коши. В этом пункте для уравнения Мальмстена оценки (4) рассмотрим еще одну весовую задачу Коши, но уже с двумя начальными условиями, в отличие от первой весовой задачи. При $0 < \nu < \dfrac{1}{2}$, $m > -2$ будем разыскивать решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t\to 0}(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t)) = u_0, \quad \lim_{t\to 0} t^{-m/2}(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t))' = 0\,. \tag{18}$$

Определение 2. *Решением задачи* (4), (18) *называется функция* $u(t)$, *которая при* $t > 0$ *дважды непрерывно дифференцируема, принимает значения, принадлежащие* $D(A)$, *и удовлетворяет уравнению* (4) *и условиям* (18).

Покажем, что операторная функция Бесселя может быть также использована для построения решения задачи (4), (18). Разрешающий оператор этой задачи обозначим через $Z_{k,l}^m(t)$, а множество операторов A, для которых задача (4), (18) однозначно разрешима, обозначим через $H_{k,l}^m$.

Теорема 4. *Пусть* $0 < \nu < \dfrac{1}{2}$, $m > -2$, *оператор* $A \in G_{1-2\nu}$ *и* $u_0 \in D(A)$. *Тогда* $A \in H_{k,l}^m$, *т.е., задача* (4), (18) *имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$Z_{k,l}^m(t)u_0 = t^{(1-k-\nu(m+2))/2}Y_{1-2\nu}(\tau)u_0, \quad \tau = \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\,, \tag{19}$$

и при этом справедлива оценка

$$\|Z_{k,l}^m(t)\| \leq Mt^{(1-k-\nu(m+2))/2}e^{\omega\tau}\,. \tag{20}$$

□ Подстановкой $u(t) = t^{(1-k-\nu(m+2))/2}w(\tau)$ задача (4), (18) сводится к следующей задаче:

$$w''(\tau) + \frac{1-2\nu}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau)\,, \tag{21}$$

$$w(0) = u_0, \quad w'(0) = 0\,. \tag{22}$$

Из (21), (22) следует представление (19) и оценка (20). Справедливость условий (18) вытекает из условий (2), которым удовлетворяет функция $Y_{1-2\nu}(\tau)u_0$. Единственность решения данной задачи доказана в работе [8]. ■

Теорема 5. *Пусть* $0 < \nu < \dfrac{1}{2}$, $m > -2$, $u_0 \in D(A)$, *оператор* $A \in H_{k,l}^m$ *и для* $Z_{kl}^m(t)$ *справедлива оценка (20). Тогда* $A \in G_{1-2\nu}$, *т.е., задача (1), (2) имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$Y_{1-2\nu}(t)u_0 = \left(\frac{m+2}{2}t\right)^{(k-1+\nu(m+2))/(m+2)} Z_{kl}^m\left(\left(\frac{m+2}{2}t\right)^{2/(m+2)}\right)\,. \tag{23}$$

□ Доказательство аналогично теореме 2. ■

Теорема 6. *Пусть* $0 < \nu < 1/2, \quad m > -2 \quad u_0 \in D(A)$. *Тогда* $G_{1-2\nu} = H_{k,l}^m$.

□ Справедливость теоремы 6 вытекает из теорем 4 и 5. ■

Замечание 3. При $l = m = 0$, $0 < k < 1$ задача (4), (18) превращается в задачу (1), (2) для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Приводимое далее следствие вытекает из теорем 1, 4 и формулы сдвига по параметру (см. [6])

$$Y_m(t) = \frac{2}{B(k/2+1/2, m/2-k/2)}\int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1}s^kY_k(ts)\,ds\,, \qquad m > k\,, \tag{24}$$

где $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функция.

Следствие 1. *Пусть* $0 < \nu < 1/2$, $m > -1$ *и* $A \in H_{k,l}^m$. *Тогда имеет место вложение* $H_{k,l}^m \subset G_{k,l}^m$ *и при этом*

$$Y_{k,l}^m(t) = \frac{2t^{\nu(m+2)}}{B(1-\nu, 2\nu)}\int_0^1 (1-s^2)^{2\nu+1}s^{(k-1)/(m+2)-\nu+1}Z_{k,l}^m(ts^{2/(m+2)})\,ds\,. \tag{25}$$

□ Функция $Y_{2\nu+1}(t)$ выражается через $Y_{1-2\nu}(t)$ при помощи формулы (24)

$$Y_{2\nu+1}(t) = \frac{2}{B(1-\nu, 2\nu)}\int_0^1 (1-s^2)^{2\nu+1}s^{1-2\nu}Y_{1-2\nu}(ts)\,ds\,. \tag{26}$$

Учитывая в (26) равенства (6) и (19), получим требуемое соотношение (25). ■

3. Третья весовая задача Коши. В этом пункте рассмотрим случай, когда $\frac{1}{2} \leq \nu < 1$, не охваченный второй весовой задачей. Будем искать решение уравнения Мальмстена (4), удовлетворяющее условиям:

$$\lim_{t\to 0}\left(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t)\right) = u_0\,, \qquad \lim_{t\to 0} t^{1-\nu(m+2)}\left(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t)\right)' = 0\,. \tag{27}$$

Покажем, что и в этом случае решение может быть построено с помощью ОФБ.

Теорема 7. *Пусть* $\frac{1}{2} \leq \nu < 1$, $m > -2$, *оператор* $A \in G_p$ *при некотором* $p \geq 0$ *и* $u_0 \in D\left(A^N\right)$, *где* $N = [N_1/2] + 2$ *([·] – целая часть числа),* N_1 *– наименьшее целое, удовлетворяющее неравенству* $2N_1 \geq p - 1 + 2\nu$. *Тогда задача (4), (27) имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$Z^m_{k,l}(t)u_0 = t^{(1-k-\nu(m+2))/2}Y_{1-2\nu}(\tau)u_0\,, \qquad \tau = \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}\,. \tag{28}$$

□ Как доказано в теореме 4, функция $Z^m_{k,l}(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (4) и первому условию в (27). Справедливость второго начального условия следует из равенства

$$t^{1-\nu(m+2)}\left(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t)\right)' = t^{1-\nu(m+2)}\left(Y_{1-2\nu}(\tau)u_0\right)' = \tau^{1-2\nu}Y'_{1-2\nu}(\tau)u_0\,.$$

Для доказательства единственности заметим, что подстановкой $u(t) = t^{(1-k-\nu(m+2))/2}w(\tau)$ уравнение Мальмстена (4) сводится к уравнению ЭПД

$$w''(\tau) + \frac{1-2\nu}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau)\,,$$

а условия (27) превращаются в условия

$$w(0) = u_0, \quad \lim_{\tau\to 0}\left(\tau^{1-2\nu}w'(\tau)\right) = 0\,.$$

Единственность решения последней задачи доказана в [8]. ■

4. Дальнейшие свойства уравнения Мальмстена.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда задача*

$$v'(t) = Av(t), \quad v(0) = u_0$$

равномерно корректна и соответствующая C_0*-полугруппа* $T(t)$ *представима в виде*

$$T(t) = \frac{(m+2)^{-2\nu-1}}{\Gamma(\nu+1)t^{\nu+1}} \quad \times$$

$$\times \quad \int_0^\infty \tau^{((m+2)(\nu+1)+m+k-1)/2}e^{-\tau^{m+2}/(m+2)^2 t}Y^m_{k,l}(\tau)d\tau\,. \tag{29}$$

□ В работе [6] приведена формула

$$T(t)=\frac{1}{2^k\Gamma(k/2+1/2)t^{(k+1)/2}}\int_0^\infty s^k e^{-s^2/4t}Y_k(s)\,ds\,, \tag{30}$$

связывающая ОФБ $Y_k(t),\ k>0$ и порождаемую ею полугруппу $T(t)$. Из (30) и соотношения (15) следует вышеуказанное представление (29). ■

Наряду с весовыми задачами Коши рассмотрим весовую задачу Дирихле, т.е., задачу отыскания решения уравнения Мальмстена

$$w''(t)+\frac{p}{t}w'(t)+\frac{q}{t^2}w(t)=-t^rAw(t), \tag{31}$$

$$\lim_{t\to 0}\,(t^{(p-1+\mu(r+2))/2}w(t))=u_0,\quad \sup_{t\geq 0}\|t^{(p-1+\mu(r+2))/2}w(t)\|\leq M \tag{32}$$

с некоторой постоянной $M>0$, где параметр $\mu=\dfrac{\sqrt{(p-1)^2-4q}}{r+2}\geq 0$

Теорема 9. *Пусть $\mu>0$, $r>-2$ и выполнены условия теоремы 5, при этом в неравенстве (20) постоянная $\omega=0$. Тогда функция*

$$w(t)=\frac{2^{2(1+\mu-\nu)}t^{(1-p+\mu(m+2))/2}}{(m+2)^{1-2\nu}(r+2)^{2\mu}B(\mu,1-\nu)}\quad\times$$

$$\times\quad\int_0^\infty y^{(k-1+m+(m+2)(1-\nu))/2}\left(\left(\frac{2}{r+2}\right)^2t^{r+2}+\left(\frac{2}{m+2}\right)^2y^{m+2}\right)^{\nu-\mu-1}Z_{kl}^m(y)u_0dy \tag{33}$$

является единственным решением задачи (31), (32).

□ Подстановкой $w(t)=t^{(1-p-\mu(r+2))/2}W(\tau)$, $\tau=\frac{2}{r+2}t^{(r+2)/2}$ задача (31), (32) сводится к задаче

$$W''(\tau)+\frac{1-2\mu}{\tau}W'(\tau)=-AW(\tau)\,, \tag{34}$$

$$W(0)=u_0,\quad \sup_{\tau\geq 0}\|W(\tau)\|\leq M. \tag{35}$$

Если $\mu>0$, то $1-2\mu<1$ и из (34), (35) следует (см. [9]) представление (33) и единственность решения задачи (31), (32). ■

Замечание 4. При $p<1$, $k<1$ и $m=l=q=r=0$ задача (31), (32) превращается в задачу (4), (5) работы [9].

Замечание 5. Уравнение Мальмстена (4) в случае $m<-2$ с помощью замены переменной $t=1/x$ сводится к уже рассмотренному уравнению Мальмстена вида

$$\hat{u}''(x)+\frac{2-k}{x}\hat{u}'(x)+\frac{l}{x^2}\hat{u}(x)=x^{-m-4}A\hat{u}(x)\,,$$

где $\hat{u}(x)=u(1/x)$. Осталось только заметить, что $-m-4>-2$ при $m<-2$.

Замечание 6. В случае, когда $m = -2$ уравнение Мальмстена (4) превращается в уравнение

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = \frac{1}{t^2}(A - lI)u(t)\,, \tag{36}$$

которое заменой $t = e^x$ сводится к уравнению

$$\tilde{u}''(x) + (k-1)\tilde{u}'(x) = (A - lI)\tilde{u}(x)\,,$$

где $\tilde{u}(x) = u(e^x)$. Для этого уравнения корректна, например, задача Коши с условиями

$$\tilde{u}(0) = u_0\,, \qquad \tilde{u}'(0) = u_1$$

в предположении что $A \in G_0$, а, следовательно, и $A - lI \in G_0$.

Литература

1. Глушак А.В. О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42;5. – С.583-589.

2. Глушак А.В. Задача Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с генератором проинтегрированной косинус-оператор-функции // Научные Ведомости БелГУ. Сер. Физико-математические науки. – 2007. – 6(37);13. – С.3-8.

3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев. – М.: Физматгиз, 1963.

4. Глушак А.В., Покручин О.А. Весовые задачи Коши для абстрактного уравнения Мальмстена // Научные Ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. – 2010. – 23(94);21. – С.68-74.

5. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – М.: Иностранная литература, 1949.

6. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя -// ДАН. – 1997. – 352;5. – С.587-589.

7. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Мат. сб. – 1955. – 36;2. – С.299-310.

8. Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д. Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Известия ВУЗов, сер. математика. – 6. – С.55-56.

9. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта // Дифференц. уравнения. – 1999. – 35;1. – С.128-130.

ABOUT PROPERTIES OF WEIGHTED CAUCHY PROBLEM FOR ABSTRACT MALMSTEN EQUATION

A.V. Glushak, O.A. Pokruchin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:Glushak@bsu.edu.ru, pokru4in.oleg@yandex.ru

Abstract. Formulas connecting the solution of weight Cauchy problems of abstract differential Malmsten equation with operator Bessel function and integrated cosine operator function are found.

Key words: weight Cauchy problem, the integrated cosine operator function, the Bessel operator function.

УДК 517.9

К ИССЛЕДОВАНИЯМ ЛИНЕЙНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛИ Т.ПУ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДА

И.П. Половинкин

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия;
Старооскольский технологический институт,
р-н Макаренко, 42, Старый Оскол, 309516, Россия, e-mail: polovinkin@yandex.ru

Аннотация. Получена двухточечная теорема о среднем значении и её обращение для гармонической функции. Доказаны двухточечные теоремы о среднем значении для некоторых линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрены их приложения к исследованию линейной непрерывной модели Т. Пу распределения дохода. В работе рассмотрена ситуация выполнения принципа Гюйгенса для решения линейного уравнения Пу распределения дохода.

Ключевые слова: теорема о среднем значении, формула среднего, принцип Гюйгенса.

1. Вывод линейного уравнения дохода. Следуя [1], обозначим через $Y = Y(x,y,t)$ отклонение уровня дохода от стационарного состояния в точке (x,y) в момент времени t. Будем считать, что сбережения S находятся в заданном отношении $s = s(t)$ к доходу. Пусть $v = v(t)$ означает отношение между основным капиталом K и доходом. Инвестиции, обозначаемые I, по определению являются темпами изменения основного капитала. Таким образом,

$$I = v\dot{Y}, \qquad S = s\dot{Y},$$

где точка сверху обозначает производную по времени t. Будем также предполагать, что существует некоторый адаптивный процесс, при котором доходы возрастают пропорционально разности инвестиций и сбережений: $Y \sim (\dot{I} - S)$. Подобную задержку предположим и при регулировании инвестиций, так что $\dot{I} \sim (vY - I)$. Итак, модель строится из следующих предположений:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = I - sY\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = v\frac{\partial Y}{\partial t} - I\,. \tag{2}$$

Взяв производную по времени от обеих частей равенства (1), получим:

$$\ddot{Y} = \dot{I} - \dot{s}Y - s\dot{Y}. \tag{3}$$

Выражая $\dot{I}$ из (2) и подставляя в (3), получим:

$$\ddot{Y} = (v - s)\dot{Y} - \dot{s}Y - I. \tag{4}$$

Теперь, выражая I из (1), мы окончательно получим уравнение дохода:

$$\ddot{Y} - (v - s - 1)\dot{Y} + (s + \dot{s})Y = 0\,. \tag{5}$$

В уравнение (5) географические координаты входят как простые параметры, так что оно является обыкновенным дифференциальным уравнением. Если же к предположениям (1) – (2) добавить предположение о межрегиональной торговле, то в первом приближении активное торговое сальдо определяется выражением

$$m\Delta Y = m\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right), \tag{6}$$

где m – коэффициент пропорциональности, характеризующий склонность к импортированию. При этих предположениях уравнение (5) заменится уравнением дохода в частных производных:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - (v-1-s)\frac{\partial Y}{\partial t} + (s+\dot{s})Y = m\Delta Y\,. \tag{7}$$

Если коэффициенты s, v постоянны, то уравнение (7) примет вид

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - (v-1-s)\frac{\partial Y}{\partial t} + sY = m\Delta Y. \tag{8}$$

2. Теорема о среднем значении для волнового уравнения А.В. Бицадзе и А.М. Нахушева. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ пару точек $(X^{(j)}, t^{(j)})$, $j=1,2$, где $X^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$, $j=1,2,$, удовлетворяющих условию

$$|X^{(1)} - X^{(2)}| < |t^{(1)} - t^{(2)}|\,. \tag{9}$$

Построим матрицу A по следующему правилу. Зафиксируем некоторый индекс $i \in \{1,\ldots,n\}$ и положим

$$a_{ij} = \frac{x_j^{(1)} - x_j^{(2)}}{|X^{(1)} - X^{(2)}|}\,, \qquad j = 1,\ldots,n\,.$$

Остальные элементы этой матрицы достроим из условий $AA^T = I$, $\det A = 1$, где A^T – матрица, транспонированная к матрице A, I – единичная матрица. Пусть A_i обозначает матрицу, полученную из матрицы заменой i-го столбца нулями. Обозначим через P величину, определяемую равенством

$$2P = \sqrt{(t^{(1)} - t^{(2)})^2 - |X^{(1)} - X^{(2)}|^2}\,. \tag{10}$$

Следуя [2] – [4], введем оператор усреднения S_t по формуле:

$$S_t = S_t^n v = \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} v\,(\eta,\,\tau)\; d\omega_\xi\,, \quad |X^{(1)} - X^{(2)}| > 0\,, \tag{11}$$

где $\gamma(n) = \sqrt{\pi^{1-n}}$,

$$\eta = \frac{|t^{(1)} - t^{(2)}|\,\xi_i (X^{(1)} - X^{(2)})}{|X^{(1)} - X^{(2)}|\sqrt{(t^{(1)} - t^{(2)})^2 - |X^{(1)} - X^{(2)}|^2}} + \frac{X^{(1)} + X^{(2)}}{2} + A_i\xi\,,$$

$$\tau = \frac{t^{(1)} + t^{(2)}}{2} - \frac{|X^{(1)} - X^{(2)}|\xi_i}{\sqrt{(t^{(1)} - t^{(2)})^2 - |X^{(1)} - X^{(2)}|^2}}\,,$$

$d\omega_\xi$ – элемент площади поверхности сферы $|\xi| = t$ в $\mathbb{R}^n$. При $X^{(1)} = X^{(2)}$ оператор S_t определим формулой

$$S_t = S_t^n v = \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} v\left(X^{(2)} + \xi\,\frac{t^{(1)} + t^{(2)}}{2}\right) d\omega_\xi\,. \tag{12}$$

Далее введем оператор B_t по формулам

$$B_t = B_t^n\, v = t\left(\frac{\partial}{2t\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}} t^{-1}\, S_t v,\ \ n = 1(\mathrm{mod}\,2)\,, \tag{13}$$

$$B_t = B_t^n\, v = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\partial}{2t\partial t}\right)^{\frac{n}{2}} \int\limits_0^t \frac{S_t v\, d\tau}{\sqrt{t^2 - \tau^2}}\,, \quad n = 0(\mathrm{mod}\,2)\,, \tag{14}$$

Теорема 1 (теорема о среднем для волнового уравнения [2] – [4]). *Если функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ является регулярным решением в области $\Omega \in R^{n+1}$ волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_k^2}\,, \tag{15}$$

то для любой пары точек $(X^{(j)}, t^{(j)})$, $j = 1, 2,$, удовлетворяющих условию (9), и таких, что область, ограниченная пересечением конусов с вершинами $(X^{(j)}, t^{(j)})$, $j = 1, 2,$, вместе с замыканием лежит в Ω, имеет место равенство

$$v(X^{(1)}, t^{(1)}) + v(X^{(2)}, t^{(2)}) = B_P\, v. \tag{16}$$

Определим число l формулами

$$l = \max\{n - 1,\ \frac{n+3}{2}\}\,, \quad n = 1(\mathrm{mod}\,2)\,, \tag{17}$$

$$l = \max\{n,\ \left[\frac{n+3}{2} + 1\right]\}\,, \quad n = 0(\mathrm{mod}\,2)\,.$$

Теорема 2 (обратная теорема о среднем для волнового уравнения [5]). *Пусть функция $v(x,t) \in C^l(\mathbb{R}^{n+1})$ для любой пары точек $(X^{(j)}, t^{(j)})$, $j = 1, 2$, которые подчиняются неравенству (9), удовлетворяет соотношению (16). Тогда она является регулярным решением волнового уравнения (15) в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

3. Двухточечная теорема о среднем для гармонической функции. Пусть теперь функция $u(x)$ удовлетворяет в окрестности шара $|x| < r$ уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0\,. \tag{19}$$

В соответствии с методом спуска Адамара ведем фиктивную переменную t, полагая

$$v(x,t) = v(x,0) = u(x)\,, \quad |x| < r\,, \quad t \in R\,. \tag{20}$$

Положим, не умаляя общности,

$$t_1 = 0\,, \quad t_2 = r > 0\,. \tag{21}$$

Функция $v(x,t)$ будет удовлетворять уравнению (15), а значит, для нее справедлива формула среднего (16), где, с учетом наших предположений, оператор S_t будет действовать следующим образом:

$$S_t = S_t^n u = \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} u\,(\eta)\; d\omega_\xi\,, \quad |X^{(1)} - X^{(2)}| > 0\,, \tag{22}$$

$$S_t = S_t^n u = \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} u\left(X^{(2)} + \xi\right)\, d\omega_\xi\,, \qquad X^{(1)} = X^{(2)}\,, \tag{23}$$

причем формула (16) преобразуется к виду

$$u(X^{(1)}) + u(X^{(2)}) = B_P u\,. \tag{24}$$

Выясним геометрический смысл формулы (24). Положим, не ограничивая общности,

$$X^{(1)} = \alpha = (\alpha_1, 0, \ldots, 0)\,, \quad X^{(2)} = 0 = (0, 0, \ldots, 0)\,. \tag{25}$$

В (22) интегрирование ведется по сфере $\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2 = t^2$. Произведем замену первой переменной

$$\nu = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{r\xi_1}{\sqrt{r^2 - \alpha_1^2}}\;. \tag{26}$$

Выражая ξ_1 через ν из формулы (26), получим

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{r^2 - \alpha_1^2}}{r}\left(\nu - \frac{\alpha_1}{2}\right)\;. \tag{27}$$

Подставляя выражение (27) в уравнение сферы $|\xi| = P$, получим в новых переменных $\nu, \xi_1, ..., \xi_n$ уравнение эллипсоида Φ:

$$\frac{4(\nu - \frac{\alpha_1}{2})}{r^2} + \frac{4(\xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)}{r^2 - \alpha_1^2} = 1\,. \tag{28}$$

Интегрирование в формуле (24) ведется по эллипсоиду Φ, заданному уравнением (28). Таким образом, доказано следующее утверждение

Теорема 3 (двухточечная теорема о среднем для гармонической функции). *Пусть область $\Omega \subset R^n$, в которой функция $u(x)$ гармонична, содержит точки $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, $|X^{(1)} - X^{(2)}| < r$. Пусть область, ограниченная эллипсоидом Φ, определенным (подходящей системе координат) уравнением (28), вместе со своим замыканием лежит в области Ω. Тогда справедлива двухточечная формула среднего значения (24).*

Пусть

$$|S_n| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2) \tag{29}$$

— площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 4. *При $X^{(1)} = X^{(2)} = X^{(0)}$ в случае $n = 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ формула среднего (24) совпадает с известной формулой среднего Гаусса для гармонической функции для сферы радиуса $r/2$:*

$$u(X^{(0)}) = \frac{1}{|S_n|\delta^{n-1}} \oint\limits_{|\xi - X^{(0)}| = \delta} u(\xi)\, d\omega_\xi\,, \qquad \delta = r/2\,. \tag{30}$$

□ Снова воспользуемся методом спуска Адамара по пpеременной t с помощью вспомогательной функции, определенной формулой (20). Выберем произвольно точку $(X^{(0)};t^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ и положим $X^{(1)} = X^{(2)} = X^{(0)}$, $t^{(1)} = t^{(0)} - \delta$, $t^{(2)} = t^{(0)+}\delta$, где $\delta = r/2$. Тогда $P = \delta$. Формула (16) примет следующий вид:

$$v(X^{(0)};t^{(0)} - \delta) + v(X^{(0)};t^{(0)} + \delta) =$$

$$= \sqrt{\pi^{1-n}} P \left(\frac{\partial}{2P\partial P}\right)^{\frac{n-1}{2}} P^{n-2} \int\limits_{|\xi|=1} v(X^{(0)} + P\xi; t^{(0)})\, d\omega_\xi\,. \tag{31}$$

Левая часть равенства (31) равна $2u(X^{(0)})$. Полагая

$$Q = Q(P,u) = \int\limits_{|\xi|=1} u(X^{(0)} + P\xi)\, d\omega_\xi\,, \tag{32}$$

применим к правой части формулы (31) тождество

$$P\left(\frac{\partial}{P\partial P}\right)^{\frac{n-1}{2}} (P^{n-2}Q) = \sum_{s=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^{\frac{n-1}{2}-s} C^s_{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(s+1/2)} P^{2s} \left(\frac{\partial}{P\partial P}\right)^s Q\,, \tag{33}$$

где

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

суть биномиальные коэффициенты, $\Gamma(t)$ – гамма-функция Эйлера. После этого получим

$$2u(X^{(0)}) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi^n}} Q(P,u) + \frac{\Gamma(n/2)(n-1)}{2\sqrt{\pi^n}} P^2 \left(\frac{\partial}{P\partial P}\right) Q(P,u) +$$

$$+ \sqrt{\pi^{1-n}} \sum_{s=2}^{\frac{n-1}{2}} \frac{2^{\frac{n-1}{2}-s} C^s_{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(s+1/2)} P^{2s} \left(\frac{\partial}{P\partial P}\right)^s Q(P,u)\,. \tag{34}$$

Первое слагаемое в правой части как раз и дает нужную величину:

$$\frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{\pi^n}} Q(P,u) = \frac{2}{|S_n| P^{n-1}} \int\limits_{|\xi - X^{(0)}|=P} u(\xi)\, d\omega_\xi\,. \tag{35}$$

Далее, применяя формулу Гаусса-Остроградского, в силу гармоничности функции u, будем иметь

$$\frac{\Gamma(n/2)(n-1)}{2\sqrt{\pi^n}} P \frac{\partial}{\partial P} Q(P,u) = \frac{n-1}{|S_n| P^{n-2}} \int\limits_{|\xi - X^{(0)}| \le P} \Delta u(\xi)\, d\xi = 0\,. \tag{36}$$

Пусть ν_ξ – единичный вектор внешней нормали к сфере $|\xi - X^{(0)}| = P$. Имеем:

$$\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial P} Q(P;u) = \frac{1}{P} \int\limits_{|\xi|=1} \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial u}{\partial \xi_j}(X^{(0)} + P\xi)\, d\omega_\xi =$$

$$= \frac{1}{P^n} \int\limits_{|\xi - X^{(0)}|=P} \frac{\partial v}{\partial \nu_\xi}(\xi, t^{(0)})\,, \tag{37}$$

Применим теперь к равенству (37) формулу Гаусса-Остроградского:

$$\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial P} Q(P;u) =$$

$$\frac{1}{P^n} \int\limits_{|\xi - X^{(0)}| \le P} \Delta_\xi u(\xi)\, d\xi = \frac{1}{P^n} \int\limits_0^P d\rho \int\limits_{|\xi - X^{(0)}|=\rho} \Delta_\xi u(\xi)\, d\omega_\xi =$$

$$= \int\limits_0^1 \rho_1^{n-1} Q(\rho_1 P; \Delta u)\, d\rho_1\,. \tag{38}$$

Положим

$$Q_s(P;u) =$$

$$= \int\limits_0^1 \rho_1^{n+2s-3}\, d\rho_1 \dots \int\limits_0^1 \rho_{s-1}^{n+1}\, d\rho_{s-1} \int\limits_0^1 \rho_s^{n-1} Q(\rho_1\rho_2 \dots \rho_s P; u)\, d\rho_s\,.$$

Последовательное применение формулы (38) приводит к соотношению

$$\left(\frac{1}{P}\frac{\partial}{\partial P}\right)^s Q(P;u) = Q_s(P; \Delta^s u) = 0\,. \quad \blacksquare \tag{39}$$

Отметим, что при доказательстве теоремы 4 мы воспользовались техникой, примененной при доказательстве теоремы 2 в работе [5], несколько изменив ее. Используя эту технику, мы в состоянии доказать утверждение, обратное к теореме Асгейрссона (см. [6]).

Введем обозначения сферических средних

$$\mu(x,y,r) = \int\limits_{|\xi|=1} v(x + r\xi, y)\, d\frac{\omega_\xi}{|S_n|}\,, \qquad \theta(x,y,r) = \int\limits_{|\xi|=1} v(x, y + r\xi)\, d\frac{\omega_\xi}{|S_n|}\,, \tag{40}$$

где $v = v(x,y) = v(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$.

Теорема 5 (обратный принцип Асгейрссона). *Пусть функция* $v = v(x,y) \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$ *для всякой точки* $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$ *и для любого* $r > 0$ *удовлетворяет равенству*

$$\mu(x,y,r) = \theta(x,y,r)\,. \tag{41}$$

Тогда она является регулярным в $\mathbb{R}^{2n}$ *решением ультрагиперболического уравнения*

$$\Delta_x v = \Delta_y v\,, \tag{42}$$

где $\Delta_x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

$\square$ Доказательство проводится аналогично предыдущему. Выражая в формуле (41) сферические средние (40) через функцию $v(x,y)$ из формулы Грина, умножая полученное равенство на n/r^2 и переходя к пределу при $r \to 0$, получим равенство (42) в точке (x,y).$\blacksquare$

3. Формула среднего для телеграфного уравнения. Пусть функция $\overline{u}(x_1, x_2, t)$ является регулярным решением гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_2^2} + c^2 \overline{u}\,. \tag{43}$$

Тогда функция

$$v(x_1, x_2, x_3, t) \equiv e^{cx_3} \overline{u}(x_1, x_2, t) \tag{44}$$

является регулярным решением трехмерного волнового уравнения (15) ($n = 3$), что проверяется непосредственной подстановкой [7]. Теперь примем во внимание равенство (43), учитывая которое, мы из (15) получим:

$$e^{cx_3^{(1)}} \overline{u}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, t^{(1)}) + e^{cx_3^{(2)}} \overline{u}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, t^{(2)}) = B_P \left(e^{cx_3} \overline{u}\right). \tag{45}$$

Далее, не умаляя общности (к общему случаю можно перейти с помощью надлежащей замены переменных), мы для простоты выкладок будем считать,что $x_1^{(1)} = \alpha > 0$, $x_2^{(1)} = x_1^{(2)} = x_2^{(2)} = x_3^{(1)} = x_3^{(2)} = 0$. Тогда действие оператора S_t может быть представлено в виде

$$S_t v = \frac{1}{\pi} \oiint\limits_{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=t^2} e^{c\xi_3} \overline{u} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{r\xi_1}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}, \xi_2, \frac{r}{2} - \frac{\alpha \xi_1}{\sqrt{r^2-\alpha^2}} \right) d\omega_\xi\,, \tag{46}$$

где $r = |t^{(1)} - t^{(2)}|$. Выражая стандартным образом поверхностный интеграл в равенстве (46) через повторный, мы получим

$$\overline{u}(0,0,0) + \overline{u}(\alpha, 0, r) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \frac{\rho \operatorname{ch}(c\sqrt{r^2-\rho^2})}{\sqrt{r^2-\rho^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{-\pi}^{\pi} u \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}, \rho\sin\theta, \frac{r}{2} - \frac{\alpha\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}} \right) d\theta\, d\rho \right)\,, \tag{47}$$

где $t = P = \sqrt{r^2-\alpha^2}/2$. Формула (47) представляет собой аналог формулы среднего (16) для уравнения (43).

4. Двухточечная теорема о среднем для уравнения Гельмгольца. Пусть функция $u(x_1, x_2)$ является регулярным решением уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + c^2 u = 0 \tag{48}$$

в $\mathbb{R}^2$. Введем фиктивные переменные x_3 и t и положим

$$\overline{u}(x_1, x_2, t) \equiv u(x_1, x_2)\,,$$

$$v(x_1, x_2, x_3, t) \equiv e^{cx_3} \overline{u}(x_1, x_2, t)\,. \tag{49}$$

Тогда функция $\overline{u}(x_1, x_2, t)$ является регулярным решением гиперболического уравнения (43), а функция $v(x_1, x_2, x_3, t)$ является регулярным решением трехмерного волнового уравнения (15). Отсюда мы немедленно получаем:

$$u(0,0) + u(\alpha, 0) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\rho\,\mathrm{ch}(c\sqrt{r^2-\rho^2})}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}, \rho\sin\theta\right)\,d\theta\,d\rho\right), \tag{50}$$

где $t = P = \sqrt{r^2-\alpha^2}/2$.

5. Формула среднего для уравнения дохода с постоянными темпами инвестиций и сбережений. В уравнении (8) можно без ограничения общности положить $m = 1$. Пусть $\mu = s + 1 - v$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \mu\frac{\partial Y}{\partial t} + sY = \Delta Y\,. \tag{51}$$

Замена функции

$$Y = e^{-\mu t/2}\overline{u} \tag{52}$$

сведет уравнение (51) к телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_2^2} + c^2\overline{u}\,, \tag{53}$$

где $c^2 = \mu^2/2 - s$.

Решение $\overline{u}(x, y, t)$ уравнения (53) удовлетворяет формуле среднего значения

$$\overline{u}(0,0,0) + \overline{u}(\alpha, 0, r) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\rho\,\mathrm{ch}(c\sqrt{r^2-\rho^2})}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} u\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}, \rho\sin\theta, \frac{r}{2} - \frac{\alpha\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}\right)\,d\theta\,d\rho\right), \tag{54}$$

где $t = P = \sqrt{r^2-\alpha^2}/2,\ |\alpha| < r$, Учитывая (52), для решения уравнения (51) мы окончательно получим следующую формулу среднего значения:

$$Y(0,0,0) + e^{\mu r/2}Y(\alpha, 0, r) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\rho\,\mathrm{ch}(c\sqrt{r^2-\rho^2})}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\mu\left(\frac{r}{4} - \frac{\alpha\rho\cos\theta}{2\sqrt{r^2-\rho^2}}\right)}Y\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}, \rho\sin\theta, \frac{r}{2} - \frac{\alpha\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}\right)\,d\theta\,d\rho\right), \tag{55}$$

где $t = \sqrt{r^2 - \alpha^2}/2$.

Формула (55) устанавливает связь между стоящей слева линейной комбинацией доходов в близких точках в различные моменты времени и динамикой изменения доходов в некоторой окрестности этих точек в течение рассматриваемого промежутка времени.

6. Стационарное линейное уравнение дохода. В рамках модели, рассматриваемой в разделах 1, 5, рассмотрим стационарное распределение дохода. Это означает, что в уравнении (51) решение Y не зависит от времени t. Тогда это уравнение примет вид

$$\Delta Y - sY = 0\,. \tag{56}$$

Применяя, как и в разделе 3, метод спуска Адамара по переменной t, мы из формулы (55) получим двухточечную формулу среднего для стационарного уравнения распределения дохода (56):

$$Y(0,0) + e^{\mu r/2} Y(\alpha,0) = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t \frac{\rho\,\mathrm{ch}(c\sqrt{r^2-\rho^2})}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{\mu\left(\frac{r}{4}-\frac{\alpha\rho\cos\theta}{2\sqrt{r^2-\rho^2}}\right)} Y\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\rho\cos\theta}{\sqrt{r^2-\alpha^2}}, \rho\sin\theta\right)d\theta\, d\rho\right)\,, \tag{57}$$

где $t = \sqrt{r^2 - \alpha^2}/2$.

Эта формула выражает связь между дисконтированными доходами в двух точках и распределением дохода в окрестности (специального вида) этих точек.

7. О принципе Гюйгенса в модели Пу. Вернемся к случаю, когда темпы сбережений и инвестиций зависят от времени, то есть к уравнению (7) Рассмотрим задание темпов инвестиций и сбережений специальным образом:

$$s = s(t) = s_0 e^{-t}\,, \tag{58}$$

$$v = v(t) = s_0 e^{-t} + 1 - \frac{1}{t}\,. \tag{59}$$

При таком выборе темпов инвестиций и сбережений уравнение (7)

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \frac{1}{t}\frac{\partial Y}{\partial t} = m\Delta Y\,. \tag{60}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функция

$$Y(x,y,t) = \frac{1}{2\pi t}\oint\limits_{S_{\sqrt{m}\,t}(x,y)} \varphi(\xi,\eta)\, dl_{\xi\eta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+\sqrt{m}\,t\cos\theta, y+\sqrt{m}\,t\sin\theta)\, d\theta \tag{61}$$

является регулярным решением уравнения (60) и удовлетворяет начальным условиям

$$\lim_{t\to+0} Y(x,y,t) = \varphi(x,y)\,, \tag{62}$$

$$\lim_{t\to+0}\frac{\partial Y}{\partial t}(x,y,t)=0\,. \qquad (63)$$

Обратим теперь внимание на следующую особенность в задании функции (61): для определения значения отклонения дохода Y в точке (x,y) в момент времени t достаточно задать значения функции $\varphi(x,y)$ лишь на окружности $S_{\sqrt{m}t}(x,y)$, то есть размерность области зависимости решения от начальных данных меньше размерности многообразия начальных данных, то есть имеет место принцип Гюйгенса. С точки зрения рассматриваемого здесь приложения это означает следующее. Начальное отклонение дохода, локализованное на плоскости, повлечет за собой в точках плоскости отклонение дохода, локализованное во времени, то есть отклонения дохода будут иметь место лишь в течение конечного промежутка времени, после которого доход вернется к стационарному состоянию. Мы оставляем в стороне вопрос о возможности создания условий, при которых входные данные могли бы определяться формулами (58)-(59). Нам представляется, что при определенном влиянии некоторого центра на поведение субъектов, участвующих в товарообмене, эти условия вполне реализуемы. Это может стать своего рода управляющим фактором. Но тогда подобная ситуация означала бы своего рода тщетность усилий этих субъектов. Разумеется, подобный вывод может быть обусловлен всего лишь тем, что мы рассматриваем здесь линейную модель, которая упускает многие нюансы динамики в предметной области. Тем не менее, выявленный эффект позволяет говорить, что с помощью рассматриваемой модели мы обнаружили некоторые реальные свойства явления, инструментом изучения которого является эта модель.

Укажем еще на один случай, когда имеет место принцип Гюйгенса. Здесь мы предположим, что и склонность к импортированию m тоже зависит от времени, причем $m=m(t)\neq 0,\ t>0$. Тогда уравнение распределения дохода можно будет записать в виде

$$a(t)\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+b(t)\frac{\partial Y}{\partial t}+\frac{(s(t)+s'(t))}{m(t)}Y=\Delta Y\,,\qquad t>0\,, \qquad (64)$$

где

$$\mu(t)=s(t)+1-v(t),\ a(t)=m^{-1}(t)\,,\qquad b(t)=\frac{\mu(t)}{m(t)}\,. \qquad (65)$$

Пусть теперь

$$s(t)=v(t)=s_0e^{-t}\,,\quad m(t)=1+\frac{1}{t}\,. \qquad (66)$$

Тогда в уравнении (64)

$$a(t)=b(t)=\frac{t}{t+1}\,,\quad s(t)+s'(t)=0\,. \qquad (67)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\begin{aligned}Y(x,y,t)&=\frac{1}{2\pi te^t}\oint\limits_{S_t(x,y)}\varphi(\xi,\eta)dl=\\&=\frac{1}{2\pi e^t}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x+t\cos\theta,y+t\sin\theta)d\theta\,.\end{aligned} \qquad (68)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что функция, определенная формулой (68), удовлетворяет уравнению (64) с коэффициентами, определенными формулами (67), а также начальным условиям

$$\lim_{t\to 0+} Y(x,y,t) = \varphi(x,y)\,,$$
$$\lim_{t\to 0+} \left(t\frac{\partial Y(x,y,t)}{\partial t}\right) = 0\,. \tag{69}$$

7. Приближение волн, удовлетворяющих принципу Гюйгенса волнами, обладающими диффузией. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c^2 u\,, \quad x\in\mathbb{R}^3\,, \quad t>0\,, \quad c\ge 0\,, \tag{70}$$

$$u(x,0) = \varphi(x)\,, \quad x\in\mathbb{R}^3\,, \tag{71}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)\,, \quad x\in\mathbb{R}^3\,. \tag{72}$$

Решение задачи (70)-(72) обозначим $u_c(x,t)$. Известно [7], что функция $u_c(x,t)$ может быть выражена формулой

$$u_c(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \rho^2 J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2})Q(\varphi,x,\rho)\,d\rho\right) +$$
$$+\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \rho^2 J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2})Q(\psi,x,\rho)\,d\rho\,, \tag{73}$$

где

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

– функция Бесселя первого рода порядка ν,

$$J_\nu(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

— функция Бесселя первого рода порядка ν от мнимого аргумента,

$$Q(\psi,x,\rho) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\oint\limits_{|\xi-x|=\rho} \psi(\xi)\,dS_\xi$$

– сферическое среднее функции $\psi(x)$ по сфере с центром в точке x и радиусом ρ.

Отметим, что функция $u_0(x,t)$ принципиально отличается от функции $u_c(x,t)$ при $c\neq 0$. Поясним это. Для функции $u_0(x,t)$ представление (73) может быть преобразовано в формулу Кирхгофа [7]:

$$u_0(x,t) = tQ(\psi,x,t) + \frac{\partial}{\partial t}(tQ(\varphi,x,t))\,. \tag{74}$$

При $c\neq 0$ интегрирование в формуле (73) ведется по шару с центром в точке x и радиусом t, в то время как в формуле (74) интегрирование ведется по границе этого шара, то есть имеет место принцип Гюйгенса.

Предположим, что мы по каким-либо причинам не можем создать предпосылок для выполнения условий (70) – (72) при $c = 0$, но можем создать предпосылки для выполнения этих условий с $c \neq 0$. При этом будем стремиться придать параметру c как можно меньшее значение. В этом смысле c можно считать "управляющим параметром", при помощи которого мы будем приближать функцию $u_0(x,t)$ (то есть решение задачи (70)-(72), удовлетворяющее принципу Гюйгенса) функциями $u_c(x,t)$ (то есть решениями, не удовлетворяющими принципу Гюйгенса и обладающими свойством диффузии волн).

Ниже, считая c управляющим параметром, мы оценим близость функций $u_0(x,t)$ и $u_c(x,t)$ при малых $c \neq 0$ на малых и на больших промежутках времени.

Теорема 6. *Пусть*

$$\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3),\ \psi \in C^2(\mathbb{R}^3),\ |\varphi(x)| \le M\,, \quad |\psi(x)| \le M\,, \quad x \in \mathbb{R}^3\,.$$

Тогда справедливы следующие оценки:

$$|u_c(x,t) - u_0(x,t)| \le M\left(\frac{\operatorname{sh}(ct) - ct}{c} + \operatorname{ch}(ct) - 1 - \frac{c^2t^2}{2}\right),$$

$$|u_c(x,t) - u_0(x,t)| \le Lc^2t^3\,,$$

где L не зависит от c и t

□ Имеем:

$$|u_c(x,t) - u_0(x,t)| \le I_1 + I_2\,,$$

где

$$I_1 = \left|\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \rho^2 Q(\psi,x,\rho)(J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2}) - 1)\,d\rho\right|,$$

$$I_2 = \left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \rho^2 Q(\varphi,x,\rho)(J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2}) - 1)\,d\rho\right)\right|.$$

Оценим каждое из слагаемых $I_1,\ I_2$. Сначала рассмотрим I_1. Выполняя операцию вычисления производной $\frac{\partial}{\partial t}$, учитывая, что $J_0(0) = 1$. мы получим

$$I_1 = \left|\frac{1}{t}\int\limits_0^t \rho^2 Q(\psi,x,\rho)\frac{\partial}{\partial t}(J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2}) - 1)\,d\rho\right|.$$

Учитывая определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда, мы получим

$$I_1 = \left|\frac{1}{t}\int\limits_0^t \rho^2 Q(\psi,x,\rho)\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^{2k}(t^2-\rho^2)^k}{2^{2k}(k!)^2}\,d\rho\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^t \rho^2 Q(\psi,x,\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^{2k}(t^2-\rho^2)^{k-1}}{2^{2k-1}(k-1)!\,k!}\,d\rho\right|.$$

Учитывая условие ограниченности функции $\psi(x)$, получим

$$I_1 \le M \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k}}{2^{2k-1}(k-1)!\,k!} \int\limits_0^t \rho^2 (t^2-\rho^2)^{k-1}\,d\rho \right| .$$

Вычисляя интеграл в правой части этого неравенства, мы будем иметь

$$I_1 \le M \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k} t^{2k+1}}{2^{2k-1} k! \Gamma(k+3/2)} \right| ,$$

а суммируя ряд в полученном неравенстве, получим окончательную оценку для I_1:

$$I_1 \le M \frac{\mathrm{sh}(ct)-ct}{c} \,. \tag{75}$$

Оценим теперь слагаемое I_2. Во-первых, выполняя внутреннее дифференцирование, получим

$$I_2 = \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \rho^2 Q(\varphi,x,\rho) \frac{\partial}{\partial t} (J_0(ic\sqrt{t^2-\rho^2})-1)\,d\rho \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \rho^2 Q(\varphi,x,\rho) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k}(t^2-\rho^2)^{k-1}}{2^{2k-1}(k-1)!\,k!}\,d\rho \right) \right| .$$

Теперь выполним внешнее дифференцирование:

$$I_2 = \left| \frac{c^2t^2}{2} Q(\varphi,x,\rho) + t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k}}{2^{2k-2}(k-2)!\,k!} \int\limits_0^t Q(\varphi,x,\rho)\rho^2(t^2-\rho^2)^{k-2}\,d\rho \right| .$$

Далее, учитывая ограниченность функции $\varphi(x)$, получим:

$$I_2 \le M \left| \frac{c^2t^2}{2} + t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^{2k}}{2^{2k-2}(k-2)!\,k!} \int\limits_0^t \rho^2(t^2-\rho^2)^{k-2}\,d\rho \right| =$$

$$= M \left(\mathrm{ch}(ct) - 1 - \frac{c^2t^2}{2} \right) . \tag{76}$$

Из (75) и (76) мы окончательно получим

$$|u_c(x,t)-u_0(x,t)| \le M \left(\frac{\mathrm{sh}(ct)-ct}{c} + \mathrm{ch}(ct) - 1 - \frac{c^2t^2}{2} \right) . \tag{77}$$

Теперь, учитывая разложение в степенные ряды функций $\mathrm{sh}(ct)$ и $\mathrm{ch}(ct)$, мы получим

$$|u_c(x,t)-u_0(x,t)| \le Lc^2t^3 \,, \quad \blacksquare \tag{78}$$

Оценка (77) при больших значениях c и t в некоторой степени характеризует расходимость разности $u_c(x,t)-u_0(x,t)$, причем она в этом случае точна в том смысле, что при постоянных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ неравенство (77) заменяется равенством.

При малых значениях c и t неравенство (78), напротив, оценивает близость функций $u_c(x,t)$ и $u_0(x,t)$.

Литература

1. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика / Т.Пу – Ижевск: Удмуртский университет, 2000. – 200 с.
2. Бицадзе А.В., Нахушев А.М. О корректной постановке задач для уравнения смешанного типа в многомерных областях // Доклады АН СССР. – 1972. – 205;1. – С.9-12.
3. Бицадзе А.В., Нахушев А.М. К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях // Доклады АН СССР. – 1972. – 204;6. – С.1289-1291.
4. Бицадзе А.В., Нахушев А.М. К теории уравнений смешанного типа в многомерных областях // Дифференциальные уравнения. – 1974. – 10;N 12. – С.2184-2191.
5. Половинкин И.П. Обращение теоремы о среднем значении для волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1991. – 27;11. – С.1987-1990.
6. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние / Ф. Йон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 158 с.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2 / Р. Курант. – Москва, Ленинград: ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1945. – 620 с.
8. Половинкин И.П. О некоторых следствиях из теоремы о среднем А.В. Бицадзе и А.М. Нахушева для волнового уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2007. – 9;1. – С.69-72.

INVESTIGATION OF THE T.PU LINEAR CONTINUAL MODEL OF RETURNS DISTRIBUTION

I.P. Polovinkin

Voronezh State University,
Universitetskaya sq., 1, Voronezh, 394006, Russia;
Voronezh Institute of Innovation Systems,
Berezovaya Roscha St., 54, Voronezh, 394043, Russia, e-mail: polovinkin@yandex.ru

Abstract. The point-to-point mean value theorem for harmonic function and its inversion have been proved. Analogously, point-to-point mean value theorems for some linear differential equations have been proved also. It is studied their applications for investigation of the Puu returns distribution linear continual model. The example of the Huygens principle for the Puu returns distribution linear equation has been constructed.

Key words: mean value theorem, mean value formula, Huygens' principle.

УДК 517.983

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ [5]

А.В. Глушак, И.М. Примак

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:Glushak@bsu.edu.ru

Аннотация. Найдены условия однозначной разрешимости краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений с дробными производными.

Ключевые слова: краевая задача, дробная производная, однозначная разрешимость.

В данной работе в банаховом пространстве E рассмотрим решение краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений дробного порядка $\alpha \in (0,1)$, содержащих либо дробную производную Герасимова-Капуто, либо дробную производную Римана-Лиувилля.

Дробная производная Герасимова-Капуто $\partial^\alpha u(t)$ определяется следующим образом:

$$\partial^\alpha u(t) = D^\alpha(u(t) - u(0))\,,$$

где $D^\alpha u(t) = \dfrac{d}{dt} I^{1-\alpha} u(t)$ – дробная производная Римана-Лиувилля [1, с. 44],

$$I^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau$$

– дробный интеграл Римана-Лиувилля, $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Исследуем разрешимость краевой задачи

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t)\,, \quad 0 < t < T\,, \tag{1}$$

$$\mu u(0) - u(T) = u_0\,. \tag{2}$$

Определение 1. *Функция $u(t) \in C([0,T],E)$ такая, что $I^{1-\alpha}u(t) \in C^1((0,T),E)$, называется решением задачи* (1), (2), *если она удовлетворяет уравнению* (1) *на интервале* $(0,T)$ *и краевому условию* (2).

Рассмотрим вначале частный случай краевой задачи, когда в уравнении (1) A — ограниченный оператор. Пусть также в условии (2) для любого $\lambda \in \sigma(A)$ ($\sigma(A)$ – спектр

[5]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613)

оператора A) число $\mu \neq E_\alpha(\lambda T^\alpha)$, где $E_\alpha(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ $(\alpha > 0)$ – функция Миттаг-Леффлера.

По теореме об отображении спектра [2, с. 609] имеет место равенство $\sigma(E_\alpha(T^\alpha A)) = E_\alpha(T^\alpha(\sigma(A)))$, откуда следует существование оператора $(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1}$, определенного на E.

Пусть $u(t)$ – решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(0) = v_0$. Тогда [3, с. 13] $u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)v_0$ при $t \in [0,T]$. Учитывая граничное условие (2), получим уравнение $\mu v_0 - E_\alpha(T^\alpha A)v_0 = u_0$. Следовательно, $v_0 = (\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1}u_0$ и

$$u(t) = E_\alpha(t^\alpha A)(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1}u_0\,. \tag{3}$$

Таким образом, если решение краевой задачи существует, то оно единственно и имеет вид (3). С другой стороны, задаваемая равенством (3) функция $u(t)$ определена при любом $u_0 \in E$ и, как нетрудно проверить, является решением рассматриваемой краевой задачи (1), (2). Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть A – ограниченный оператор в банаховом пространстве E и для любого $\lambda \in \sigma(A)$, $\mu \neq E_\alpha(\lambda T^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in E$ решение краевой задачи* (1), (2) *существует, единственно и имеет вид* (3).

Пример 1. Пусть E – пространство комплексных чисел $\mathbb{C}$, A – оператор умножения на $A \in \mathbb{C}$ и $\mu \neq E_\alpha(AT^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{C}$ решение краевой задачи (1), (2) единственно и имеет вид

$$u(t) = \frac{E_\alpha(At^\alpha)u_0}{\mu - E_\alpha(AT^\alpha)}\,.$$

Рассмотрим далее краевую задачу, содержащую дробную производную Римана-Лиувилля

$$D^\alpha v(t) = Av(t)\,, \quad 0 < t < T\,, \tag{4}$$

$$\mu I^{1-\alpha}v(0) - v(T) = u_0\,. \tag{5}$$

Определение 2. *Функция $v(t) \in C((0,T],E)$ такая, что $I^{1-\alpha}v(t) \in C^1((0,T),E)$, называется решением задачи* (4), (5), *если она удовлетворяет уравнению* (4) *на интервале* $(0,T)$ *и краевому условию* (5).

В уравнении (4), по-прежнему, будем считать A ограниченным оператором в банаховом пространстве E. Пусть также в условии (5) для любого $\lambda \in \sigma(A)$, число $\mu \neq T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)$, где $E_{\alpha,\alpha}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)}$ $(\alpha > 0)$ — функция типа Миттаг-Леффлера. По теореме об отображении спектра имеет место равенство $\sigma(E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A)) = E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha(\sigma(A)))$, откуда следует существование оператора $(\mu I - E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A))^{-1}$, определенного на E.

Пусть $v(t)$ – решение уравнения (4), удовлетворяющее условию $I^{1-\alpha}v(0) = v_0$. Тогда [1, с. 601] $v(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)v_0$ при $t \in [0,T]$. Учитывая граничное условие (5), получим

$\mu v_0 - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A)v_0 = u_0$. Следовательно, $v_0 = (\mu I - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A))^{-1}u_0$ и

$$v(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A)(\mu I - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A))^{-1}u_0\,. \tag{6}$$

Таким образом, если решение краевой задачи существует, то оно единственно и имеет вид (6). С другой стороны, задаваемая равенством (6) функция $v(t)$ определена при любом $u_0 \in E$ и, как нетрудно проверить, является решением рассматриваемой краевой задачи (4), (5). Проведенные рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть A – ограниченный оператор в банаховом пространстве E и для любого $\lambda \in \sigma(A)$ $\mu \neq T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in E$ решение краевой задачи* (4), (5) *существует, единственно и имеет вид* (6).

Полученные в теоремах 1 и 2 результаты при $\alpha = 1$ превращаются в соответствующие результаты работы [4, с. 62]. Решение краевой задачи в этом случае имеет вид

$$u(t) = e^{tA}(\mu I - e^{tA})^{-1}u_0\,.$$

Пример 2. Пусть E – пространство комплексных чисел $\mathbb{C}$, A — оператор умножения на $A \in \mathbb{C}$ и $\mu \neq T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)$. Тогда для любого $u_0 \in \mathbb{C}$ решение краевой задачи (4), (5) единственно и имеет вид

$$u(t) = \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)u_0}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(AT^\alpha)}\,.$$

Перейдем к рассмотрению краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка с неограниченным оператором A.

В дальнейшем будем считать допустимой область G комплексной плоскости, ограниченную кусочно-гладкими кривыми и такую, что для достаточно больших по модулю $\lambda \in G$

$$\arg\lambda \in [\varphi_1, \varphi_2] \cup [\varphi_3, \varphi_4]\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2} < \varphi_3 < \varphi_4 < \frac{3\pi}{2}\,.$$

Оператор A и параметр μ будут удовлетворять следующему условию.

Условие 1. Область определения $D(A)$ оператора A плотна в E. Существуют допустимая область G, постоянная $K > 0$ и целое число $k \geq -1$, такие что

$$\forall\lambda \notin G \quad \|R(\lambda, A)\| \leq K(1 + |\lambda|)^k\,,$$

где $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$ и, кроме того, $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$.

Пусть $u(t) = U(t)u_0$ – решение краевой задачи с ограниченным оператором A. В силу теоремы 1 оператор $U(t)$, являющийся функцией ограниченного оператора A и параметра μ, может быть записан в виде контурного интеграла

$$U(t) = E_\alpha(t^\alpha A)(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A))^{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}R(\lambda, A)d\lambda\,, \tag{7}$$

где ∂G – граница области G, содержащей спектр оператора A, $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$.

Покажем, что решение краевой задачи (1), (2) с неограниченным оператором A при выполнении условия 1 может быть получено в форме контурного интеграла (7).

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 1 и $u_0 \in D(A^{k+3})$, тогда функция*

$$u(t) = U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)u_0 d\lambda \tag{8}$$

определена, имеет непрерывную дробную производную порядка α и является решением краевой задачи (1), (2).

□ Покажем, что при $u_0 \in D(A^{k+2})$ функция $U(t)u_0$ определена и непрерывна на $(0, T)$. Возьмем произвольное $\lambda_0 \notin \bar{G}$. Используя тождество Гильберта

$$R(\lambda, A)R(\mu, A) = \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{\lambda - \mu}\,,$$

для $u_0 \in D(A)$ можно записать

$$U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)R(\lambda_0, A)(A - \lambda_0 I)u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda_0, A)(A - \lambda_0 I)u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A - \lambda_0 I)u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda\,.$$

Функция Миттаг-Леффлера имеет следующую асимптотику [5, с. 43]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} \exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \tag{9}$$

где $|z| \to \infty, \quad |\arg(z)| \le \eta,\ \dfrac{\pi\alpha}{2} < \eta < \min(\pi, \pi\alpha)$ и

$$E_{\alpha,\beta}(z) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(\beta - \alpha k)} \frac{1}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad |z| \to \infty, \qquad \eta \le |\arg(z)| \le \pi\,. \tag{10}$$

Применяя лемму Жордана и учитывая (9), (10), для $0 < t < T$ получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{u_0}{\lambda - \lambda_0} d\lambda = 0\,. \tag{11}$$

Таким образом,

$$U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)}{\lambda-\lambda_0}u_0 d\lambda\,, \qquad t\in(0,T)\,. \tag{12}$$

Учитывая асимптотику функции Миттаг-Леффлера (9), (10), для $t\in[\delta,T]$, $\delta>0$ и достаточно больших $|\lambda|$ будем иметь оценки

$$\frac{|E_\alpha(\lambda t^\alpha)|\;\|R(\lambda,A)\|}{|\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)|\cdot|\lambda-\lambda_0|}\le$$

$$\le\frac{\left|\dfrac{1}{\alpha}t\lambda^{1/\alpha}e^{t\lambda^{1/\alpha}} - \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha k)}\dfrac{1}{(\lambda t^\alpha)^k} + O\left(\dfrac{1}{(\lambda t^\alpha)^{N+1}}\right)\right|}{\left|\mu - \dfrac{1}{\alpha}T\lambda^{1/\alpha}e^{T\lambda^{1/\alpha}} + \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha k)}\dfrac{1}{(\lambda T^\alpha)^k} - O\left(\dfrac{1}{(\lambda T^\alpha)^{N+1}}\right)\right|}\cdot\frac{K}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}\le$$

$$\le\frac{\left|T\lambda^{1/\alpha}e^{T\lambda^{1/\alpha}}\right|}{\left|\mu - T/\alpha\;\lambda^{1/\alpha}e^{T\lambda^{1/\alpha}}\right|}\cdot\frac{K_1}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|},\quad |\arg(\lambda t^\alpha)|\le\eta\,,\quad \eta\in(\pi\alpha/2,\pi\alpha)\,, \tag{13}$$

$$\frac{|E_\alpha(\lambda t^\alpha)|\|R(\lambda,A)\|}{|\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)|\cdot|\lambda-\lambda_0|}\le$$

$$\le\frac{\left|-\sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha k)}\dfrac{1}{(\lambda t^\alpha)^k} + O\left(\dfrac{1}{(\lambda t^\alpha)^{N+1}}\right)\right|}{\left|\mu + \sum\limits_{k=1}^{N}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha k)}\dfrac{1}{(\lambda T^\alpha)^k} - O\left(\dfrac{1}{(\lambda T^\alpha)^{N+1}}\right)\right|}\cdot\frac{K}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}\le$$

$$\le\frac{1}{|\mu|}\cdot\frac{K_1}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}\,,\qquad \eta\le|\arg(\lambda t^\alpha)|\le\pi\,. \tag{14}$$

Очевидно, неравенства вида (13), (14) имеют место и для $t\in[0,\delta]$. Следовательно, при $k=-1$ интеграл в (12) равномерно сходится по $t\in[0,T]$ и определяет непрерывную на $[0,T]$ функцию.

Выполним аналогичное преобразование еще раз и получим

$$U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)u_0}{\lambda-\lambda_0}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)R(\lambda_0,A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{\lambda-\lambda_0}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^2 u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu-E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda_0,A)(A-\lambda_0 I)^2u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu-E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^2u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu-E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{(A-\lambda_0 I)u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda\,.$$

Аналогично равенству (11) устанавливается, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu-E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{(A-\lambda_0 I)u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda=0\,,$$

$$U(t)u_0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu-E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^2u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda\,.$$

Последний интеграл определяет непрерывно дифференцируемую на $[0,T]$ функцию.

При $k>-1$ указанные преобразования следует повторить $k+1$ раз. В результате для $u_0\in D\left(A^{k+2}\right)$ получим представление

$$U(t)u_0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu-E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda\,,\qquad t\in[0,T]\,. \tag{15}$$

Из ограниченности оператора $U(t)$ на плотном в E подмножестве $D(A^{k+2})$ следует его ограниченность на всем E [6, с. 130], что позволяет получить непрерывную зависимость решения задачи (1), (2) от значения u_0. Для построенного продолжения имеем

$$(\mu U(0)-U(T))u_0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\mu}{\mu-E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda+$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_\alpha(\lambda T^\alpha)}{\mu-E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\mu-E_\alpha(\lambda T^\alpha)}{\mu-E_\alpha(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda\,,$$

где подынтегральная функция аналитична по $\lambda\in C\setminus\overline{G}$, $\lambda\neq\lambda_0$, непрерывна по $\lambda\in\partial G$ и убывает на бесконечности как $|\lambda|^{-2}$. Поэтому имеем

$$(\mu U(0)-U(T))u_0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0d\lambda=$$

$$=\frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0=u_0\,,$$

и, стало быть, $U(t)u_0$ удовлетворяет краевому условию (2).

Покажем, что при $t \in (0,T)$ $U(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (1). Учитывая замкнутость оператора A, $\forall u_0 \in D(A^{k+2})$ и $\forall \lambda \in \partial G$, получим $U(t)u_0 \in D(A^{k+2})$ и

$$AU(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{AE_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \left(\frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} + \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)\right) \frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)(\lambda-\lambda_0)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+3}} u_0 d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda\,.$$

Аналогично равенству (11) для $t \in (0,T)$, устанавливается равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+3}} d\lambda = 0\,,$$

поэтому

$$AU(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda\,. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$\partial^\alpha U(t)u_0 = D^\alpha(U(t)-U(0))u_0 = D^\alpha U(t)u_0 - \frac{U(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} D^\alpha \int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} d\lambda - \frac{U(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{-\alpha} E_{\alpha,1-\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} d\lambda +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{-\alpha}}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(\lambda-\lambda_0)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} d\lambda\,. \tag{17}$$

Применяя в (17) равенство $E_{\alpha,\beta}(t) - \dfrac{1}{\Gamma(\beta)} = tE_{\alpha,\alpha+\beta}(t)$ [5, с. 45] и учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{-\alpha}}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(\lambda-\lambda_0)^{k+2} u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} d\lambda = 0\,,$$

получим

$$\partial^\alpha U(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{\lambda E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}} u_0 d\lambda = AU(t)u_0\,.$$

Таким образом, функция $U(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (1). ■

Приведем далее достаточное условие единственности полученного в теореме 3 решения. Теорему единственности мы докажем путем аппроксимации задачи (1), (2) задачами

$$\partial^\alpha u_n(t) = A_n u_n(t)\,, \quad t \in (0, T)\,, \tag{18}$$

$$\mu u_n(0) - u_n(T) = u_0\,. \tag{19}$$

с ограниченными операторами A_n.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3 и оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов A_n таких, что*

$$\|E_{\alpha,\alpha}\left(t^\alpha A_n\right)\| \le M_1 e^{\omega t}\,, \tag{20}$$

и для $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$

$$\left\|(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A_n))^{-1}\right\| \le M_2 \tag{21}$$

с постоянными $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ и ω не зависящими от n. Тогда определяемое равенством (8) решение задачи (1), (2) единственно.

□ Пусть $u(t)$ – решение задачи (1), (2), а $u_n(t)$ – решение задачи (18), (19). Тогда функция $w_n(t) = u(t) - u_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial^\alpha w_n(t) = A_n w_n(t) + (A - A_n)u(t)\,, \quad t \in (0, T)$$

и нулевому краевому условию

$$\mu w_n(0) - w_n(T) = 0\,.$$

Поскольку оператор A_n ограничен, то подобно тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1, запишем соотношение

$$w_n(t) = E_\alpha(t^\alpha A_n)(\mu I - E_\alpha(T^\alpha A_n))^{-1} W_n(T) + W_n(t)\,, \tag{22}$$

где

$$W_n(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left((t-s)^\alpha A_n\right)(A - A_n)u(s)\, ds\,. \tag{23}$$

Учитывая оценку (20) и равномерное по $t \in [0, T]$ стремление к нулю последовательности $(A - A_n)u(t)$, из (23) вытекает равномерное по $t \in [0, T]$ стремление к нулю последовательности $W_n(t)$, а из (20)-(22) – последовательности $w_n(t) = u(t) - u_n(t)$.

Итак, рассматриваемое решение $u(t)$ задачи (1), (2) является пределом последовательности $u_n(t)$ и, следовательно, определяется единственным образом. ■

Другое достаточное условие единственности решения задачи (1), (2) можно пытаться найти следующими рассуждениями. Пусть $u(t)$ — решение краевой задачи

$$\partial^\alpha u(t) = Au(t) \quad (0 < t < T)\,, \qquad \mu u(0) - u(T) = 0\,.$$

Обозначим через $L_\alpha(\lambda) = E_\alpha(\lambda T^\alpha) - \mu$ и пусть λ_0 – ее нуль. Поскольку функция Миттаг-Леффлера при $\alpha \neq 1$ не имеет пикаровских исключительных значений (см. [7, с. 150]), то такое λ_0 всегда существует.

В работе [4, с. 65] доказано, что единственность решения задачи (1), (2) при $\alpha = 1$ зависит от взаимного расположения собственных значений оператора A и нулей функции $L_1(\lambda)$ – они не должны совпадать.

Определим векторно-значную целую функцию

$$f_\alpha(\lambda) = \int\limits_0^T s^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda s^\alpha) u(s)\, ds\,.$$

Если λ_0 не является собственным значением оператора A, то $Af_\alpha(\lambda_0) = \lambda_0 f_\alpha(\lambda_0) - L_\alpha(\lambda_0)\, u(0)$ и, следовательно, $f_\alpha(\lambda_0) = 0$.

Введем в рассмотрение скалярную функцию $\Upsilon_\alpha(\lambda) = \dfrac{h(f_\alpha(\lambda))}{L_\alpha(\lambda)}$, где h – линейный непрерывный функционал на E. В работе [8] при $\alpha = 1$ путем анализа нулей функции $f_1(\lambda)$ методом частных для функции $\Upsilon_1(\lambda)$ установлено равенство $u(t) \equiv 0$. Таким образом, проблема единственности решения задачи (1), (2) может быть сведена к распространению метода частных для функции $\Upsilon_\alpha(\lambda)$ при $\alpha \neq 1$.

Пример 3. Пусть оператор A является генератором аналитической полугруппы $Q(t)$. Тогда [9, с. 266]

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{K}{1 + |\lambda|}\,, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda \ge \sigma\,,$$

а допустимая область G – область, лежащая слева от контура ∂G, состоящего из двух лучей $\lambda = \sigma + \rho e^{i\gamma}$ и $\lambda = \sigma + \rho e^{-i\gamma}$, где $0 \le \rho < \infty$, γ – любое число из промежутка $(\pi/2, \pi/2 + \arcsin 1/K)$, обход контура производится из нижней полуплоскости в верхнюю.

В силу теоремы 3 для $u_0 \in D\,(A^2)$ и $\mu \notin E_\alpha(T^\alpha \bar{G})$, функция

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{E_\alpha(\lambda t^\alpha)}{\mu - E_\alpha(\lambda T^\alpha)} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} Q(\tau) u_0\, d\tau d\lambda$$

является решением задачи (1), (2). Поскольку оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов [10, с. 64], то, в силу теоремы 4, указанное решение является единственным.

Установим далее результаты, аналогичные теоремам 3 и 4 для краевой задачи (4), (5), содержащей дробную производную Римана-Лиувилля.

Оператор A и параметр μ будут удовлетворять следующему условию.

Условие 2. Область определения $D(A)$ оператора A плотна в E. Существуют допустимая область G, постоянная $K>0$ и целое число $k \geq -1$, такие что

$$\forall \lambda \notin G \qquad \|R(\lambda, A)\| \leq K(1+|\lambda|)^k \,,$$

и, кроме того, $\mu \notin T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \overline{G})$.

Пусть $v(t)=V(t)u_0$ – решение краевой задачи с ограниченным оператором A. По теореме 2 оператор $V(t)$, являющийся функцией ограниченного оператора A и параметра μ, может быть записан в виде контурного интеграла

$$V(t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)d\lambda \,, \tag{24}$$

где ∂G – граница области G, содержащей спектр оператора A, $\mu \notin E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \overline{G})$.

Покажем, что решение краевой задачи (4), (5) с неограниченным оператором A при выполнении условия 2 может быть получено в форме контурного интеграла (24).

Теорема 5. *Пусть выполнено условие 2 и* $u_0 \in D(A^{k+2})$, *тогда функция*

$$v(t) = V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)u_0 d\lambda \,, \tag{25}$$

определена, имеет непрерывную дробную производную порядка α *при* $t \in (0;T)$ *и является решением краевой задачи* (4), (5).

□ Докажем, что при $u_0 \in D(A^{k+2})$ функция $V(t)u_0$ определена и непрерывна на $(0,T]$. Возьмем произвольное $\lambda_0 \notin \overline{G}$. Используя тождество Гильберта, для $u_0 \in D(A)$ можно записать

$$V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} R(\lambda, A)R(\lambda_0, A)(A-\lambda_0 I)u_0 d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)u_0}{\lambda-\lambda_0} d\lambda \, +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda_0, A)(A-\lambda_0 I)u_0}{\lambda-\lambda_0} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \frac{R(\lambda, A)(A-\lambda_0 I)u_0}{\lambda-\lambda_0} d\lambda \, +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{u_0}{\lambda-\lambda_0}d\lambda\,. \tag{26}$$

Применяя лемму Жордана, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{u_0}{\lambda-\lambda_0}d\lambda=0\,,\qquad t\in(0,T]\,. \tag{27}$$

Откуда,

$$V(t)u_0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)}{\lambda-\lambda_0}u_0 d\lambda\,,\qquad t\in(0,T]\,. \tag{28}$$

Учитывая асимптотику функции Миттаг-Леффлера (9), (10), для $t\in[0,T]$ и достаточно больших $|\lambda|$ запишем оценки

$$\frac{|t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t)|\|R(\lambda,A)\|}{|\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T)||\lambda-\lambda_0|}\le$$

$$\frac{t^{\alpha-1}\left|\frac{1}{\alpha}(\lambda t^{\alpha})^{(1-\alpha)/\alpha}e^{t\lambda^{1/\alpha}}-\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha k)}\frac{1}{(\lambda t^{\alpha})^{k}}+O\left(\frac{1}{(\lambda t^{\alpha})^{N+1}}\right)\right|}{\left|\mu-T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\alpha}(\lambda T^{\alpha})^{(1-\alpha)/\alpha}e^{T\lambda^{1/\alpha}}+\sum\limits_{k-1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha k)}\frac{1}{(\lambda T^{\alpha})^{k}}-O\left(\frac{1}{(\lambda T^{\alpha})^{N+1}}\right)\right)\right|}\frac{K}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}\le$$

$$\le\frac{\left|\lambda^{(1-\alpha)/\alpha}e^{T\lambda^{1/\alpha}}\right|}{\left|\mu-1/\alpha\;\lambda^{1/\alpha-1}\;e^{T\lambda^{1/\alpha}}\right|}\frac{K_1}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}\,,\qquad|\arg(\lambda t^{\alpha})|\le\eta\,,\qquad\eta\in(\pi\alpha/2,\pi)\,, \tag{29}$$

$$\frac{|t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t)|\;\|R(\lambda,A)\|}{|\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T)||\lambda-\lambda_0|}\le$$

$$\le\frac{t^{\alpha-1}\left|-\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha k)}\frac{1}{(\lambda t^{\alpha})^{k}}+O\left(\frac{1}{(\lambda t^{\alpha})^{N+1}}\right)\right|}{\left|\mu+T^{\alpha-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\alpha-\alpha k)}\frac{1}{(\lambda T^{\alpha})^{k}}-O\left(\frac{1}{(\lambda T^{\alpha})^{N+1}}\right)\right)\right|}\frac{K}{|\lambda||\lambda-\lambda_0|}\le\frac{K}{|\mu||\lambda||\lambda-\lambda_0|}\,, \tag{30}$$

где $\eta\le|\arg(\lambda t^{\alpha})|\le\pi$.

Из (29), (30) следует, что при $k=-1$ интеграл (28) сходится равномерно по $t\in[0,T]$ и определяет непрерывную на $[0,T]$ функцию.

Выполняя подобное преобразование еще раз, получим

$$V(t)u_0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)u_0}{\lambda-\lambda_0}d\lambda=$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)R(\lambda_0,A)(A-\lambda_0 I)^2u_0}{\lambda-\lambda_0}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^2u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda_0,A)(A-\lambda_0 I)^2u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^2u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{(A-\lambda_0 I)u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda\,.$$

Аналогично равенству (11), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{(A-\lambda_0 I)u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda = 0\,,$$

поэтому

$$V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^2u_0}{(\lambda-\lambda_0)^2}d\lambda\,.$$

При $k > -1$ указанные преобразования следует повторить $k+1$ раз и мы получим

$$V(t)u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda\,, \qquad t\in[0,T]\,. \tag{31}$$

Из ограниченности $V(t)$ на плотном подмножестве $D(A^{k+2})$ следует его ограниченность на E. Для построенного продолжения имеем

$$(\mu I^{1-\alpha}(V(0)) - V(T))u_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\mu I^{1-\alpha}(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha))\mid_{t=0}}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\mu(E_{\alpha}(\lambda t^\alpha))\mid_{t=0}}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}{\mu - E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\mu-E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}{\mu-E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda\,,$$

где подынтегральная функция аналитична по $\lambda\in C\setminus\overline{G}$, $\lambda\neq\lambda_0$, непрерывна по $\lambda\in\partial G$ и убывает на бесконечности как $|\lambda|^{-2}$. Поэтому имеем

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda=\frac{1}{(k+1)!}\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0=u_0\,,$$

следовательно, $V(t)u_0$ удовлетворяет краевому условию (5).

Покажем, что при $t\in(0;T)$ $V(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (4). Учитывая замкнутость оператора A и равенство (11) для $u_0\in D(A^{k+2})$ и $\lambda\in\partial G$, получим $V(t)u_0\in D(A^{k+2})$. Кроме того,

$$AV(t)u_0=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{At^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}u_0}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\left(\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}+\frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}R(\lambda,A)\right)\frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda\,.$$

С другой стороны,

$$D^{\alpha}V(t)u_0=-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int\limits_{\partial G}\frac{t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{\lambda t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^{\alpha})}{\mu-T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^{\alpha})}\frac{R(\lambda,A)(A-\lambda_0 I)^{k+2}}{(\lambda-\lambda_0)^{k+2}}u_0 d\lambda=AV(t)u_0\,,$$

следовательно, функция $V(t)u_0$ удовлетворяет уравнению (4). ■

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов A_n таких, что*

$$\|E_{\alpha,\alpha}(t^{\alpha}A_n)\|\leq M_3 e^{\omega t},\tag{32}$$

и для $\mu \notin T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \bar{G})$

$$\left\|(\mu I - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A_n))^{-1}\right\| \le M_4 \tag{33}$$

с постоянными $M_3 > 0$, $M_4 > 0$ *и* ω *не зависящими от* n. *Тогда решение задачи* (4),(5), *определяемое равенством* (24), *единственно.*

□ Пусть $v(t)$ – решение задачи (4), (5), а $v_n(t)$ – решение задачи

$$D^\alpha v_n(t) = A_n v_n(t)\,, \quad 0 < t < T\,, \tag{34}$$

$$\mu I^{1-\alpha} v_n(0) - v_n(T) = u_0\,, \tag{35}$$

с ограниченными операторами A_n. Тогда функция $w_n(t) = v(t) - v_n(t)$ удовлетворяет уравнению

$$D^\alpha w_n(t) = A_n w_n(t) + (A - A_n)v(t)\,, \quad t \in (0,T)$$

и нулевому краевому условию

$$\mu I^{1-\alpha} w_n(0) - w_n(T) = 0\,.$$

Поскольку оператор A_n ограничен, то аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 2, запишем соотношение

$$w_n(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha A_n)(\mu I^{1-\alpha} - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha A_n))^{-1}W_n(T) + W_n(t)\,, \tag{36}$$

где

$$W_n(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left((t-s)^\alpha A_n\right)(A - A_n)v(s)\,ds\,. \tag{37}$$

Учитывая оценку (32) и равномерное по $t \in [0,T]$ стремление к нулю последовательности $(A - A_n)v(t)$, из (37) вытекает равномерное по $t \in [0,T]$ стремление к нулю последовательности $W_n(t)$, а из (32), (33), (36) – последовательности $w_n(t) = v(t) - v_n(t)$.

Итак, рассматриваемое решение $v(t)$ задачи (4), (5) является пределом последовательности $v_n(t)$ и, следовательно, определяется единственным образом. ■

Пример 4. Пусть оператор A является генератором аналитической полугруппы $Q(t)$. Тогда (см. пример 3)

$$\|R(\lambda, A)\| \le \frac{K}{1+|\lambda|}\,, \qquad \mathrm{Re}\,\lambda \ge \sigma\,,$$

а допустимая область G – область, лежащая слева от контура ∂G, состоящего из двух лучей $\lambda = \sigma + \rho e^{i\gamma}$ и $\lambda = \sigma + \rho e^{-i\gamma}$, где $0 \le \rho < \infty$, γ – любое число из промежутка $(\pi/2, \pi/2 + \arcsin 1/K)$, обход контура производится из нижней полуплоскости в верхнюю.

В силу теоремы 5 для $u_0 \in D\left(A^2\right)$ и $\mu \notin T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(T^\alpha \bar{G})$, функция

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)}{\mu - T^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda T^\alpha)} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda\tau} Q(\tau) u_0 \, d\tau d\lambda$$

является решением задачи (4), (5). Так как оператор A является сильным пределом последовательности ограниченных коммутирующих друг с другом операторов, то в силу теоремы 6 указанное решение является единственным.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко. – Минск: Наука и техника, 1987.

2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы (общая теория) / Н. Данфорд. – М.: ИЛ. – 1962.

3. Bajlekova E. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces / Ph. D. Thesis / Eindhoven University of Technology, 2001.

4. Иванов В.К., Мельникова И.В., Филинков А.И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В.К. Иванов. – М.: Физматлит. – 1995.

5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations / A.A. Kilbas. – Math. Studies 204. – Elsevier, 2006.

6. Треногин В.А., Функциональный анализ / В.А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

7. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций / А.А. Гольдберг. – М.: Наука, 1970.

8. Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым // Математические заметки. – 77; 2. – С.273-290.

9. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский. – М.: Наука, 1966.

10. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М.: Наука, 1967.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

A.V. Glushak, I.M. Primak

Belgorod State University,

Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:Glushak@bsu.edu.ru

Abstract. Conditions of unique solvability of boundary value problems are found for abstract differential equations with fractional derivatives.

Key words: boundary value problem, fractional derivative, unique solvability.

УДК 517.958

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ [6]

В. Л. Прядиев

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:pryad@mail.ru

Аннотация. Доказывается формула, связывающая размерность пространства решений задачи Штурма-Лиувилля на геометрическом графе Γ с размерностями пространств решений таких же задач на подграфах, получаемых из Γ выбрасыванием какой-либо точки, не являющейся граничной вершиной.

Ключевые слова: геометрический граф, задача Штурма-Лиувилля, размерность пространства решений.

1. Объект исследования

Всюду ниже Γ – конечный и замкнутый геометрический граф, т. е. $\Gamma := \bigcup\limits_{e\in\mathcal{E}} e$, где $\mathcal{E}$ – конечный набор отрезков кривых в пространстве $\mathbb{R}^n$, которые ещё обладают свойством, что любые два отрезка кривых из $\mathcal{E}$ либо не пересекаются, либо пересекаются ровно в одной точке, причём являющейся их общим концом. Дополнительно о Γ будем предполагать, что Γ, как множество в $\mathbb{R}^n$, является связным.

Для каждого ребра $e \in \mathcal{E}$ зафиксируем какую-либо его непрерывную параметризацию $\pi_e : [\alpha_e; \beta_e] \to e$ (здесь α_e и β_e – некоторые вещественные числа, $\alpha_e < \beta_e$, а непрерывность π_e понимается в смысле евклидовых метрик в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$). О π_e также предполагается взаимная однозначность как сужения π_e на $[\alpha_e; \beta_e)$, так и сужения π_e на $(\alpha_e; \beta_e]$; тем самым не исключается случай $\pi_e(\alpha_e) = \pi_e(\beta_e)$, т. е. рёбра-петли. В соответствии с параметризацией рёбер вводится понятие производной для произвольной функции, определённой на $\Gamma \setminus \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ – множество вершин Γ, т. е. $\mathcal{V} := \bigcup\limits_{e\in\mathcal{E}} \partial e$; здесь $\partial e := \{\pi_e(\alpha_e); \pi_e(\beta_e)\}$. А именно, пусть комплекснозначная функция y определена в некоторой окрестности[7] точки $x \in e \setminus \partial e$, т. е. $y \circ \pi_e$ определена в некоторой окрестности точки $\pi_e^{-1}(x) \in (\alpha_e; \beta_e)$; здесь и далее через π_e^{-1} обозначено отображение, обратное к сужению π_e на $(\alpha_e; \beta_e)$. Числа $y'(x) := (y \circ \pi_e)'\,(\pi_e^{-1}(x))$ и $y''(x) := (y \circ \pi_e)''\,(\pi_e^{-1}(x))$ будем называть соответственно первой и второй производной функции y в точке x.

---

[6]Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (госконтракты № П693 от 20.05.2010 г., № 02.740.11.0613 от 29.03.2010 г.).

[7]Окрестность в Γ понимается в смысле индуцированной на Γ из $\mathbb{R}^n$ евклидовой топологии.

Чтобы определить производные в вершинах Γ, нам понадобятся дополнительные построения (эти построения существенны только при наличии рёбер-петель). Половинками ребра e назовём кривые $h := \{\pi_e(s) \,|\, \alpha_e \leqslant s \leqslant \gamma_e\}$ и $\eta := \{\pi_e(s) \,|\, \gamma_e \leqslant s \leqslant \beta_e\}$, где $\gamma_e := (\alpha_e + \beta_e)/2$. Будем при этом использовать следующие обозначения: $\pi_h := \pi_e\big|_{[\alpha_e;\gamma_e]}$, $\pi_\eta := \pi_e\big|_{[\gamma_e;\beta_e]}$, $\alpha_h := \alpha_e$, $\beta_h := \gamma_e$, $\alpha_\eta := \gamma_e$, $\beta_\eta := \beta_e$. Множество всех половинок рёбер Γ обозначим через $\mathcal{H}$. Для любой вершины v через $\mathcal{H}(v)$ обозначим $\{h \in \mathcal{H} \,|\, \partial h \ni v\}$. Если $h \in \mathcal{H}(v)$ (т. е. $\partial h \ni v$), то будем говорить, что h примыкает к v.

Если теперь функция y определена в некоторой окрестности вершины v, то производную функции y в вершине v вдоль кривой $h \in \mathcal{H}(v)$ в направлении от v определим следующим образом:

$$y'_h(v) := \begin{cases} \quad (y\circ \pi_h)'\,(\alpha_h) & ,\ \text{если } x = \pi_h\,(\alpha_h) \\ \\ -(y\circ \pi_h)'\,(\beta_h) & ,\ \text{если } x = \pi_h\,(\beta_h) \end{cases} .$$

Далее, будем предполагать, что во множестве $\mathcal{V}$ вершин Γ зафиксировано подмножество $\partial\Gamma$ такое, что множество $\Gamma\backslash\partial\Gamma$ связно. Точки из $\partial\Gamma$ будем называть граничными вершинами геометрического графа Γ, а точки из $J := \mathcal{V}\setminus\partial\Gamma$ – внутренними вершинами геометрического графа Γ.

В дальнейшем множество пар (x, h) таких, что $x \in J$, а $h \in \mathcal{H}(x)$, будем обозначать через $\mathcal{P}$.

Формула

$$(Ly)(x) := \begin{cases} -\quad y''(x) + q(x)y(x) & ,\ \text{если } x \in \Gamma \setminus \mathcal{V} \\ \\ -\sum\limits_{h\in\mathcal{H}(x)} \alpha(x,h)y'_h(x) + q(x)y(x) & ,\ \text{если } x \in J \end{cases} ,$$

в которой отображения $q : \Gamma \to \mathbb{C}$ и $\alpha : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ заданы, определяет дифференциальный оператор L, для которого будем рассматривать краевую задачу

$$\begin{cases} (Ly)(x) = 0 & (x \in \Gamma \setminus \partial\Gamma) \\ y(x) = 0 & (x \in \partial\Gamma) \end{cases} , \tag{1}$$

где y – искомая комплекснозначная функция, непрерывная в вершинах Γ.

Вопрос о размерности π пространства решений задачи (1) эквивалентен вопросу о геометрической кратности собственного значения соответствующей спектральной задачи. Последний изучался многими авторами (см., например, [1-4]). Было замечено, что значение π зависит от расположения нулей решений задачи (1). Например, если у задачи (1) есть решение y_0 без нулей во внутренних вершинах и циклах Γ, то $\pi = 1$ (см., например, [1, теорема 3, из § 2 главы III], либо [2, теорема 3], либо [3, теорема 5.4], либо [4, теорема 10]). Также отмечалось влияние на значение π т. н. "гладкого примыкания", когда все решения задачи (1) тождественно равны нулю на некотором ребре, примыкающем к некоторой граничной вершине (см., например, лемму 5.2 из [3] или,что то же самое, лемму пункта 5.4.5 из [5]).

В настоящей статье обобщаются результаты статьи [6] – с сохранением разработанного в ней подхода. Это позволяет усилить отмеченные результаты из [1-5].

2. Формулировка и доказательство основного результата

Пусть c – некоторая точка из $\Gamma \setminus \partial\Gamma$, а ℓ – количество компонент связности множества $\Gamma \setminus \{c\}$ (не исключено, что $\ell = 1$ – такое возможно, если c принадлежит некоторому циклу Γ или если одновременно $c \in J$ и $|\mathcal{H}(c)| = 1$). Обозначим замыкания этих компонент связности через $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\ell$. Заметим, что каждое из множеств Γ_j является графом. Будем считать, что

1) $\partial\Gamma_j = (\partial\Gamma \cap \Gamma_j) \cup \{c\}$;

2) множество всех внутренних вершин Γ_j совпадает с $(J \cap \Gamma_j) \setminus \{c\}$;

3) параметризация геометрического графа Γ_j наследуется от Γ, т. е., во-первых, если $e \in \mathcal{E}$ является ребром Γ_j, то его параметризация, как ребра Γ_j равна π_e, и во-вторых, если $e \in \mathcal{E}$ и $c \in e \setminus \partial e$, то параметризацией $e_1 := \{\pi_e(s) \,|\, \alpha_e \leqslant s \leqslant \pi_e^{-1}(c)\}$, как ребра того единственного графа Γ_j, для которого e_1 является ребром, объявляется сужение π_e на $[\alpha_e; \pi_e^{-1}(c)]$, а параметризацией $e_2 := \{\pi_e(s) \,|\, \pi_e^{-1}(c) \leqslant s \leqslant \beta_e\}$ – сужение π_e на $[\pi_e^{-1}(c); \beta_e]$.

Рассмотрим теперь задачи

$$\begin{cases} (Ly)(x) = 0 & (x \in \Gamma_j \setminus \partial\Gamma_j) \\ y(x) = 0 & (x \in \partial\Gamma_j) \end{cases}, \tag{2}$$

$j = \overline{1,\ell}$. Далее, через π_j обозначается размерность линейного пространства решений задачи (2).

Для каждого $j = \overline{1,\ell}$ посредством $\mathcal{H}_j(c)$ обозначим множество всех половинок рёбер геометрического графа Γ_j, примыкающих к c.

Приводимая ниже теорема показывает, что разность между π и $\sum\limits_{j=1}^{\ell} \pi_j$ может принимать только значения -1, 0 и 1, а какое именно – зависит от выполнения двух условий:

(А) для любого $j = \overline{1,\ell}$ всякое решение задачи (2) удовлетворяет равенству

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_j(c)} \alpha(c,h) y_h'(c) = 0\,, \tag{3}$$

где в случае $c \notin J$ полагается, что $\alpha(c,h)$ равно 1 для обеих h, примыкающих к c,

(Б) всякое решение задачи (1) обращается в нуль в точке c.

Для любого утверждения $\mathcal{B}$ определим число

$$\mathrm{T}_{\mathcal{B}} := \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{B} \text{ истинно} \\ 0, & \text{если } \mathcal{B} \text{ ложно} \end{cases}.$$

Теорема. *Имеет место равенство* $\pi = \sum\limits_{j=1}^{\ell} \pi_j + \mathrm{T}_{(\text{А})} - \mathrm{T}_{(\text{Б})}$.

□ Обозначим через Y линейное пространство всех решений задачи (1), а через Y_0 – линейное подпространство функций из Y, обращающихся в нуль в точке c. Отображение $y \mapsto y(c)$, рассматриваемое на Y, есть линейный функционал на Y, и Y_0 есть ядро этого функционала; поэтому $\dim Y_0 = \dim Y - 1 + \mathrm{T}_{(\text{Б})}$, т. е. $\dim Y_0 = \pi - 1 + \mathrm{T}_{(\text{Б})}$. Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\dim Y_0 = \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j + \mathrm{T}_{(\text{А})} - 1\,. \tag{4}$$

Рассмотрим случай $\mathrm{T}_{(\text{А})} = 0$, т. е. случай, когда для некоторого значения k параметра j задача (2) имеет решение, удовлетворяющее неравенству

$$\sum_{h \in \mathcal{H}_k(c)} \alpha(c,h) y'_h(c) \neq 0\,.$$

В этом случае (4) примет вид

$$\dim Y_0 = \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j - 1\,. \tag{5}$$

Допустим пока, что

$$\pi_k = 1 \quad \text{и} \quad \pi_j = 0 \quad (j \neq k)\,. \tag{6}$$

Пусть $y \in Y_0$. Тогда $y(c) = 0$, и значит, для любого j сужение $y\big|_{\Gamma_j}$ есть решение задачи (2), откуда в силу (6) вытекает, во-первых, что

$$y\big|_{\Gamma_j} \equiv 0 \qquad (j \neq k)\,, \tag{7}$$

и во-вторых, существование $\beta \in \mathbb{C}$ такого, что

$$y\big|_{\Gamma_k} \equiv \beta\varphi\,, \tag{8}$$

где φ – некоторое нетривиальное решение задачи (2) при $j = k$. Из (7) и (8) следует

$$0 = -\sum_{h \in \mathcal{H}(c)} \alpha(c,h) y'_h(c) + q(c) y(c) = -\beta \sum_{h \in \mathcal{H}_k(c)} \alpha(c,h) \varphi'_h(c)\,,$$

что ввиду $\sum\limits_{h \in \mathcal{H}_k(c)} \alpha(c,h)\varphi'_h(c) \neq 0$ влечёт $\beta = 0$. Объединяя теперь (7) и (8), получим $y \equiv 0$, что ввиду произвольности выбора y означает, что $\dim Y_0 = 0$. Но тогда из (6) вытекает (5).

Теперь рассмотрим случай, когда (6) не выполняется. Пусть I_1 – множество всех тех j, для которых $\pi_j > 0$ и некоторое решение задачи (2) не удовлетворяет равенству (3). Пусть I_2 – множество всех тех j, для которых $\pi_j > 0$, но всякое решение задачи (2) удовлетворяет равенству (3). Наконец, пусть I_3 – множество всех тех $j = \overline{1, \ell}$, которые не вошли ни в I_1, ни в I_2. Множество I_1 непусто, так как $I_1 \ni k$. Для каждого $j \in I_1 \cup I_2$ в пространстве решений задачи (2) существует базис $\varphi_1^j, \ \dots \ , \ \varphi_{\pi_j}^j$. При этом можно считать, что для $j \in I_1$ этот базис выбран так, что для функционала μ_j, определённого формулой $\mu_j(\varphi) := \sum\limits_{h \in \mathcal{H}_j(c)} \alpha(c,h)\varphi_h'(c)$, выполнены равенства

$$\mu_j(\varphi_1^j) = 1, \quad \mu_j(\varphi_m^j) = 0 \quad (m = \overline{2, \pi_j})\,. \tag{9}$$

Рассмотрим функции:

$$v_1^j(x) = \begin{cases} \varphi_1^k(x) & , \text{ если } x \in \Gamma_k \\ -\varphi_1^j(x) & , \text{ если } x \in \Gamma_j \\ 0 & , \text{ если } x \in \Gamma \setminus (\Gamma_k \cup \Gamma_j) \end{cases} \qquad (j \in I_1 \setminus \{k\})\,, \tag{10}$$

$$v_m^j(x) = \begin{cases} \varphi_m^j(x) & , \text{ если } x \in \Gamma_j \\ 0 & , \text{ если } x \in \Gamma \setminus \Gamma_j \end{cases} \qquad (j \in I_1, \ m = \overline{2, \pi_j})\,, \tag{11}$$

$$v_m^j(x) = \begin{cases} \varphi_m^j(x) & , \text{ если } x \in \Gamma_j \\ 0 & , \text{ если } x \in \Gamma \setminus \Gamma_j \end{cases} \qquad (j \in I_2, \ m = \overline{1, \pi_j})\,. \tag{12}$$

Непосредственно проверяется, что эти функции являются нетривиальными решениями задачи (1), принадлежащими Y_0, и что их число равно $|I_1 \setminus \{k\}| + \sum\limits_{j \in I_1} (\pi_j - 1) + \sum\limits_{j \in I_2} \pi_j$, то есть $\sum\limits_{j=1}^{\ell} \pi_j - 1$. Покажем линейную независимость функций (10)–(12). Пусть

$$\sum_{j \in I_1 \setminus \{k\}} D_1^j v_1^j(x) + \sum_{j \in I_1} \sum_{m=2}^{\pi_j} D_m^j v_m^j(x) + \sum_{j \in I_2} \sum_{m=1}^{\pi_j} D_m^j v_m^j(x) = 0 \qquad (x \in \Gamma)\,, \tag{13}$$

где D_m^j – некоторые комплексные числа. Сужая это равенство на подграфы Γ_j для $j \in I_2 \cup (I_1 \setminus \{k\})$, получим в силу (10)-(12), что

$$\sum_{m=1}^{\pi_j} D_m^j \varphi_m^j(x) = 0 \quad (x \in \Gamma_j)\,, \quad j \in I_2\,,$$

$$-D_1^j \varphi_1^j(x) + \sum_{m=2}^{\pi_j} D_m^j \varphi_m^j(x) = 0 \qquad (x \in \Gamma_j)\,, \qquad j \in I_1 \setminus \{k\}\,,$$

откуда, ввиду определения функций φ_m^j, вытекает, что

$$D_m^j = 0 \qquad (j \in I_2 \cup (I_1 \setminus \{k\})\,, \quad m = \overline{1, \pi_j})\;. \tag{14}$$

Из (14) и (13) следует тождество

$$\sum_{m=2}^{\pi_k} D_m^k \varphi_m^k(x) = 0 \qquad (x \in \Gamma_k)\;,$$

которое, ввиду линейной независимости функций φ_m^k, влечёт

$$D_m^k = 0 \quad (m = \overline{2, \pi_k}) \ ,$$

что вместе с (14) означает линейную независимость функций (10)–(12).

Для доказательства равенства (5) остаётся показать, что если $y \in Y_0$, то y представима в виде линейной комбинации функций (10)–(12). Итак, пусть $y \in Y_0$. Тогда $y(c) = 0$, и значит, для любого $j = \overline{1, \ell}$ функция $y\big|_{\Gamma_j}$ есть решение задачи (2). Но тогда, во-первых, для любого $j \in I_3$ выполнено $y\big|_{\Gamma_j} \equiv 0$, и во-вторых, для любого $j \in I_2 \cup (I_1 \setminus \{k\})$ функция $y\big|_{\Gamma_j}$ представима в виде линейной комбинации функций $\varphi_1^j, \ldots, \varphi_{\pi_j}^j$, то есть для каждого $j \in I_2 \cup (I_1 \setminus \{k\})$ существует последовательность $\{\xi_m^j\}_{m=1}^{\pi_j}$ комплексных чисел, такая, что

$$y\big|_{\Gamma_j} = \sum_{m=1}^{\pi_j} \xi_m^j \varphi_m^j \ . \tag{15}$$

Рассмотрим на Γ функцию

$$z = y - \sum_{j \in I_2} \sum_{m=1}^{\pi_j} \xi_m^j v_m^j - \sum_{j \in I_1 \setminus \{k\}} \left[-\xi_1^j v_1^j + \sum_{m=2}^{\pi_j} \xi_m^j v_m^j \right] . \tag{16}$$

Если $z \equiv 0$ на Γ, то требуемое утверждение доказано. Поэтому рассмотрим случай, когда z нетривиальна. В силу (16), z есть решение задачи (1). Далее, ввиду (15) и (10)-(12), выполнено

$$z\big|_{\Gamma_j} \equiv 0 \qquad (j \neq k). \tag{17}$$

Значит, $z(c) = 0 = z_h'(c)$ для всех $h \in \mathcal{H}(c) \setminus \mathcal{H}_k(c)$, что влечёт

$$\mu_k(z) = q(c)z(c) - \sum_{j \neq k} \mu_j(z) = 0 \ . \tag{18}$$

Из (17) следует, что $z\big|_{\Gamma_k} \not\equiv 0$, поэтому (с учётом $z(c) = 0$) сужение $z\big|_{\Gamma_k}$ есть нетривиальное решение задачи (2) при $j = k$, причём линейно независимое, в силу (18), с φ_1^k. Значит, во-первых, $\pi_k > 1$, во-вторых,

$$z\big|_{\Gamma_k} = \sum_{m=1}^{\pi_k} \xi_m^k \varphi_m^k \tag{19}$$

при некоторых $\xi_1^k, \ldots, \xi_{\pi_k}^k$ из $\mathbb{C}$.

Из (18), (19) и (9) вытекает, что

$$0 = \mu_k(z) = \sum_{m=1}^{\pi_k} \xi_m^k \mu(\varphi_m^k) = \xi_1^k \ ,$$

то есть $\xi_1^k = 0$, и поэтому равенство (19) можно уточнить:

$$z\big|_{\Gamma_k} = \sum_{m=2}^{\pi_k} \xi_m^k \varphi_m^k\,.$$

А это равенство, в силу (11) (учитываем, что $k \in I_1$) и (17), равносильно равенству

$$z = \sum_{m=2}^{\pi_k} \xi_m^k v_m^k\ ,$$

которое в совокупности с (16) доказывает представимость y в виде линейной комбинации функций (10)–(12).

Таким образом, равенство (5) доказано и в случае, когда (6) не выполняется.

Итак, если $\mathrm{T}_{(\mathrm{A})} = 0$, то (4) выполняется. Пусть теперь $\mathrm{T}_{(\mathrm{A})} = 1$. Тогда (4) примет вид:

$$\dim Y_0 = \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j\ . \tag{20}$$

Пусть

$$\pi_j = 0 \quad (j = \overline{1,\ell}). \tag{21}$$

Пусть также $y \in Y_0$. Тогда для любого $j = \overline{1,\ell}$ функция $y\big|_{\Gamma_j}$ есть решение задачи (2), что ввиду (21) влечёт тривиальность $y\big|_{\Gamma_j}$ для всех $j = \overline{1,\ell}$, то есть тривиальность y. Значит, $\dim Y_0 = 0$, что в совокупности с (21) влечёт (20).

Теперь допустим, что (21) не выполняется, то есть $I_1 = \varnothing$, $I_2 \neq \varnothing$. Рассмотрим функции (12), являющиеся, в силу своего определения, нетривиальными решениями задачи (1), принадлежащими Y_0. Число этих функций равно

$$\sum_{j\in I_2} \pi_j \left(= \sum_{j=1}^{\ell} \pi_j \right),$$

и они линейно независимы (это установлено при рассмотрении случая $\mathrm{T}_{(\mathrm{A})} = 0$).

Остаётся доказать, таким образом, что всякая функция из Y_0 представима в виде линейной комбинации функций (12). Итак, пусть $y \in Y_0$. Тогда для любого $j = \overline{1,\ell}$ функция $y\big|_{\Gamma_j}$ есть решение задачи (2), что влечёт, во-первых, тривиальность $y\big|_{\Gamma_j}$ при $j \in I_3$, во-вторых, что для любого $j \in I_2$ существует последовательность $\{\xi_m^j\}_{m=1}^{\pi_j}$ комплексных чисел, такая, что выполнено (15), откуда в силу (12) вытекает равенство

$$y = \sum_{j\in I_2} \sum_{m=1}^{\pi_j} \xi_m^j v_m^j\ . \quad \blacksquare$$

Замечание 1. Выражение $(py')'(x)$, где p – положительная непрерывная функция, после замены $t = \omega(x) := \int^x [p(s)]^{-1}\,ds$ принимает вид: $z''(t)/p(\omega^{-1}(t))$, где $z := y \circ \omega^{-1}$.

Поэтому утверждение доказанной теоремы сохраняет силу и в том случае, если в формуле оператора L производную y'' заменить на $(py')'$.

Замечание 2. В конце первого раздела настоящей статьи были отмечены некоторые результаты из работ [1–5]. С учётом замечания 1, уже упомянутая лемма 5.2 из [3] есть частный случай доказанной выше теоремы 1. Что же касается утверждения "Если у задачи (1) есть решение y_0 без нулей во внутренних вершинах и циклах Γ, то $\pi = 1$", то оно следует из теоремы 1 индукцией по количеству S-зон[8] функции y_0. В самом деле, база индукции имеется – это следует, например, из теоремы Штурма о перемежаемости нулей для уравнения $Ly = 0$ (элементарное доказательство этой теоремы содержится в [1] – см. там теорему 1 главы III). Если же S-зон – хотя бы две, то, предполагая, что для меньшего количества S-зон доказываемое утверждение верно, рассмотрим крайнюю S-зону Γ_0 функции y_0, т. е. S-зону, которая пересекается ровно с одной из других S-зон y_0 (причём ровно в одной точке – т. к. у y_0 нет нулей в циклах Γ). Беря в качестве c эту точку пересечения (в этом случае $\ell = 2$), будем иметь: $\pi_1 = 1 = \pi_2$ – в силу предположения индукции. Поэтому, так как ещё и $\mathrm{T}_{(\mathrm{A})} = 0$ (достаточно рассмотреть сужение y_0 на Γ_0 и учесть, что $y_0'(c) \neq 0$), то применение теоремы 1 даёт: $\pi = 2 - \mathrm{T}_{(\mathrm{Б})}$. Применяя теперь уже упомянутую теорему Штурма к сужению y_0 и любого другого решения уравнения $Ly = 0$ на Γ_0, получим $\mathrm{T}_{(\mathrm{Б})} = 1$, что и влечёт окончательно $\pi = 1$.7

Литература

1. Пенкин О.М. Некоторые вопросы качественной теории краевых задач на графах / Дисс. канд. физ.-мат. наук. / Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1988. – 88 с.

2. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифференц. уравнения. – 1989. – 25;7. – С.1141-1150.

3. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю.В. Покорный. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 272 с.

4. Покорный Ю.В. О неосцилляции обыкновенных дифференциальных уравнений и неравенств на пространственных сетях // Дифференц. уравнения. – 2001. – 37;5. – С.661-672.

5. Pokornyi Yu.V., Pryadiev V.L. The qualitative Sturm-Liouville theory on spatial networks // J.Math.Sci. – 2004. – 119;6. – P.788-835.

6. Завгородний М.Г., аль-Обейд А., Прядиев В.Л. Геометрическая кратность собственных значений задачи Дирихле на графе / М.Г. Завгородний. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1992. – Деп. в ВИНИТИ 22.09.92, № 2821-В29.‘– 8 с.

[8]Под S-зоной функции y_0 здесь понимается есть замыкание компоненты связности множества $\{x \in \Gamma \,|\, y_0(x) \neq 0\}$.

RECURRENT FORMULA OF SOLUTION SPACE DIMENSION FOR STURM-LIOUVILLE's PROBLEM ON GEOMETRICAL GRAPH

V. L. Pryadiev

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:e-mail:pryad@mail.ru

Abstract. It is proved the formula connecting dimension of solutions space of Sturm-Liouville's problem on geometrical graph Γ with dimensions of solution spaces of same problems on subgraphs which are obtained by exception of any point from Γ which is not boundary vertex.

Key words: geometrical graph, Sturm-Liouville problem, dimension of solutions space.

УДК 517.9

ЯВНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ СИСТЕМЫ ЛАМЕ ПЛОСКОЙ ОРТОТРОПНОЙ УПРУГОСТИ [9]

Е.А. Абаполова, А.П. Солдатов

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:soldatov@bsu.edu.ru

Аннотация. Установлено, что ядро обобщенного потенциала двойного слоя системы Ламе в плоской ортотропной среде зависит только от модулей упругости и найдено явное его выражение. Рассмотрен также и изотропный случай.

Ключевые слова: потенциал двойного слоя, ортотропная и изотропная среды, однородные матриц-функции, модули упругости.

Рассмотрим систему Ламе для плоской задачи в ортотропной упругой среде [1, 2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x}+a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \tag{1}$$

с матричными коэффициентами

$$a_{11}=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_3\end{pmatrix},\qquad a_{12}=\begin{pmatrix}0 & \alpha_4\\ \alpha_3 & 0\end{pmatrix},$$

$$a_{21}=\begin{pmatrix}0 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 0\end{pmatrix},\qquad a_{22}=\begin{pmatrix}\alpha_3 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix},$$

где модули упругости α_1, α_2, α_3 положительны и $\alpha_4^2<\alpha_1\alpha_2$. Введём матричный трехчлен $p(z)=a_{11}+(a_{12}+a_{21})z+a_{22}z^2$ этой системы. Он представляет собой симметричную матрицу

$$p=\begin{pmatrix}p_1 & p_3\\ p_3 & p_2\end{pmatrix},\qquad \begin{aligned}p_1(z)&=\alpha_1+\alpha_3 z^2\,,\\ p_2(z)&=\alpha_3+\alpha_2 z^2\,,\\ p_3(z)&=(\alpha_3+\alpha_4)z\,.\end{aligned} \tag{2}$$

Очевидно, характеристическое уравнение $p_1p_2-p_3^2=0$ системы (1) биквадратно и его корни ν_1, ν_2 в верхней полуплоскости можно выразить явно через модули упругости. С этой целью введем положительные ρ и ρ_0 по формулам

$$\rho^2=\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}},\qquad \rho_0^2=\frac{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4^2+2\alpha_3(\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4)}{\alpha_2\alpha_3}\,. \tag{3}$$

[9]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (госконтракты № П693 и № 02.740.11.0613)

Тот факт, что выражение в правой части второго равенства положительно, следует из условия $\alpha_4^2 < \alpha_1\alpha_2$. Из этих же соображений величина

$$\rho_0^2 - 4\rho^2 = \frac{(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_3)^2 - (\alpha_3 + \alpha_4)^2}{\alpha_2\alpha_3} = \frac{(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4)(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4 - 2\alpha_3)}{\alpha_2\alpha_3}$$

имеет один и тот же знак с $\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4 - 2\alpha_3$. Как показано в [3], имеют место формулы

$$\nu_{1,2} = i\rho e^{\pm i\theta}\,, \quad 2\theta = \arccos\left[\frac{\rho_0^2 - 2\rho^2}{2\rho^2}\right], \text{ если } \rho_0 < 2\rho\,,$$
$$\nu_{1,2} = i\rho e^{\pm t}\,, \quad 2t = \operatorname{arch}\left[\frac{\rho_0^2 - 2\rho^2}{2\rho^2}\right], \text{ если } \rho_0 > 2\rho\,, \tag{4}$$
$$\nu_1 = \nu_2 = i\rho\,, \text{ если } \rho_0 = 2\rho\,.$$

Легко видеть, что независимо от этих трех случаев для суммы $s = \nu_1 + \nu_2$ и произведения $t = \nu_1\nu_2$ этих корней имеем выражения

$$s = i\rho_0,\ t = -\rho^2. \tag{5}$$

Как видно из (4), корни ν_1 и ν_2 различны при $\rho_0 \neq 2\rho$ и имеется один кратный корень $\nu = i\rho_0$ при $\rho_0 = 2\rho$. Эти случаи далее мы отмечаем посредством обозначений (i) и (ii) соответственно. С каждым из этих случаев свяжем матрицу

$$\text{(i) } J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii) } J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Следующая лемма установлена в [4].

Лемма 1. *Существует такая обратимая матрица* $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, *что* $a_{11}b + (a_{12} + a_{21})bJ + a_{22}bJ^2 = 0$ *и блочная матрица* B *с элементами* $B_{11} = \overline{B_{12}} = b$, $B_{21} = \overline{B_{22}} = bJ$ *обратима. При этом любая другая матрица* b_1 *с теми же свойствами связана с* b *соотношением* $b_1 = bd$ *с некоторой обратимой матрицей* d, *коммутирующей с* J.

Показано также, что при $\alpha_3 + \alpha_4 \neq 0$ условию леммы удовлетворяет матрица

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_2\nu_1^2 & \alpha_3 + \alpha_2\nu_2^2 \\ -(\alpha_3 + \alpha_4)\nu_1 & -(\alpha_3 + \alpha_4)\nu_2 \end{pmatrix}, \tag{6i}$$

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_3 + \alpha_2\nu^2 & 2\alpha_2\nu \\ -(\alpha_3 + \alpha_4)\nu & -(\alpha_3 + \alpha_4) \end{pmatrix}. \tag{6ii}$$

Если $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$, то (4) переходит в

$$\nu_1 = i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}, \quad \nu_2 = i\sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}$$

и лемма 1 удовлетворяется с единичной матрицей $b = 1$. В дальнейшем этот случай исключаем из рассмотрений.

Из леммы видно, что однородная степени нуль матриц-функция

$$H(\xi) = \mathrm{Im}\,[b(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} b^{-1}] \tag{7}$$

не зависит от выбора b в лемме и целиком определяется модулями упругости.

Пусть область D ограничена ляпуновским контуром Γ и $n = n_1 + in_2$ означает единичную внешнюю нормаль. Как известно [5], классический потенциал двойного слоя для оператора Лапласа в этой области можно записать в форме

$$(P_0\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma p_0(t, t-z)\varphi(t)|dt| \quad z \in D\ ,$$

где положено $p_0(t,\xi) = |\xi|^{-2}[n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2]$.

Обобщенный потенциал двойного слоя для системы Ламе представляет собой интеграл [6]

$$(P\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma p_0(t, t-z)H(t-z)\varphi(t)|dt|\ , \quad z \in D\ ,$$

для любой вектор- функции $\varphi \in C(\Gamma)$ он определяет функцию $u \in C(\overline{D})$, удовлетворяющей системе Ламе в области D.

Основная цель данной заметки – описать матрицу H, а, следовательно и потенциал $P\varphi$ явно в терминах модулей упругости. Параллельно двум случаям (i) и (ii) положим

$$(i)\quad \Delta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu_1 - \nu_2 & 0 \\ 0 & \nu_2 - \nu_1 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\quad \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

и, в обозначениях (3), (5), положим

$$\begin{gathered} \omega(\xi) = (\xi_1 + \nu_1\xi_2)(\xi_1 + \nu_2\xi_2) = \xi_1^2 - \rho^2\xi_2^2 + i\rho_0\xi_1\xi_2\,, \\ \omega^1(\xi) = -2\rho^2\xi_1\xi_2 + i\rho_0(\xi_1^2 + \rho^2\xi_2^2)\,. \end{gathered} \tag{9}$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$2|\omega(\xi)|^2 H(\xi) = |\xi|^2 \mathrm{Im}[(\omega^1(\xi) + 2\bar{\omega}(\xi)(b\Delta b^{-1})]\,. \tag{10}$$

□ Доказательство для каждого из случаев (i) и (ii) проведем отдельно.

(i) Положим

$$h(\xi,\nu) = \frac{-\xi_2 + \nu\xi_1}{\xi_1 + \nu\xi_2}\ ,$$

тогда $(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}$ представляет собой диагональную матрицу с элементами $h(\xi,\nu_k)$ вдоль диагонали. По определению матрицы Δ отсюда

$$(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} = \frac{h(\xi,\nu_1) + h(\xi,\nu_2)}{2} + \frac{h(\xi,\nu_1) - h(\xi,\nu_2)}{\nu_1 - \nu_2}\Delta\ .$$

В обозначениях (6.2) имеем:

$$\frac{h(\xi,\nu_1)+h(\xi,\nu_2)}{2}=\frac{\omega^0(\xi)}{2\omega(\xi)},\qquad \frac{h(\xi,\nu_1)-h(\xi,\nu_2)}{\nu_1-\nu_2}=\frac{|\xi|^2}{\omega(\xi)}\ , \tag{11}$$

Подставляя эти выражения в предыдущее равенство, в соответствии с определением (7) получим равенство

$$2|\omega(\xi)|^2 H(\xi)=\mathrm{Im}[(\omega^0\bar\omega)(\xi)+2|\xi|^2\bar\omega(\xi)(b\Delta b^{-1})]\ . \tag{12}$$

Таким образом, остается убедиться, что оно может быть записано в форме второго равенства (10). Другими словами, дело сводится к соотношению

$$\mathrm{Im}[(\omega^0\bar\omega)(\xi)]=|\xi|^2\mathrm{Im}[\omega^1(\xi)] \tag{13}$$

для квадратичных форм (9).

Легко видеть, что

$$\mathrm{Im} h(\xi,\nu)=\frac{|\xi|^2\mathrm{Im}\nu}{|\xi_1+\nu\xi_2|^2}\ .$$

Подставляя это выражение в мнимую часть первого равенства (11), получим:

$$\mathrm{Im}\frac{\omega^0(\xi)}{|\xi|^2\omega(\xi)}=\frac{|\xi|^2\mathrm{Im}\nu_1}{|\xi_1+\nu_1\xi_2|^2}+\frac{|\xi|^2\mathrm{Im}\nu_2}{|\xi_1+\nu_2\xi_2|^2}=$$

$$=\frac{(\mathrm{Im}\nu_1)|\xi_1+\nu_2\xi_2|^2+(\mathrm{Im}\nu_2)|\xi_1+\nu_1\xi_2|^2}{|\omega(\xi)|^2}\ ,$$

что доказывает соотношение (13), а вместе с ним и равенство (10).

(ii) В этом случае

$$(-\xi_2+\xi_1 J)(\xi_1+\xi_2 J)^{-1}=h(\xi,\nu)+\frac{|\xi|^2}{(\xi_1+\nu\xi_2)^2}\Delta\ .$$

Полагая $\nu_k=\nu$ в (9) и (11), получим равенства

$$h(\xi,\nu)=\frac{\omega^0(\xi)}{2\omega(\xi)},\quad (\xi_1+\nu\xi_2)^2=\omega(\xi)\ ,$$

которые вместе с предыдущим выражением как и в случае (i) приводят к (12). Остается заметить, что соотношение (13) справедливо и при $\nu_1=\nu_2$, так что как и выше равенство (12) переходит в (10).

Матрицы b и Δ даются формулами (6), (8) и прямые вычисления показывают, что

$$2b\Delta b^{-1}=-\frac{2(\alpha_3+\alpha_4)}{\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\begin{pmatrix}0&1\\ \rho^2&0\end{pmatrix}+i\rho_0\frac{\alpha_3-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}{\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\begin{pmatrix}-1&0\\ 0&1\end{pmatrix}.$$

В частности, эта матрица не зависит от случаев (i) и (ii). Подставляя это выражение в (10), после элементарных преобразований приходим к формуле

$$H(\xi) = \frac{\rho_0}{\alpha_3 + \sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\frac{|\xi|^2}{(\xi_1^2 - \rho^2\xi_2^2)^2 + \rho_0^2\xi_1^2\xi_2^2}\,G_{11}(\xi)\ ,$$
$$G(\xi) = \begin{pmatrix} \rho^2(\alpha_2\xi_1^2 + \alpha_3\xi_2^2) & (\alpha_3 + \alpha_4)\xi_1\xi_2 \\ \rho^2(\alpha_3 + \alpha_4)\xi_1\xi_2 & \alpha_3\xi_1^2 + \alpha_1\xi_2^2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Соответственно потенциал двойного слоя примет вид

$$(P\varphi)(z) = k\int_\Gamma p(t, t - z)G(t - z)\varphi(t)|dt|\ , \tag{15}$$

где положено

$$k = \frac{\rho_0}{\pi(\alpha_3 + \sqrt{\alpha_1\alpha_2})}\ , \qquad p(t,\xi) = \frac{n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2}{(\xi_1^2 - \rho^2\xi_2^2)^2 + \rho_0^2\xi_1^2\xi_2^2}\ .$$

В случае изотропной среды, когда

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha_3 + \alpha_4\ ,$$

эти формулы получают дальнейшее упрощение. В этом случае в (3) можем положить $\rho = 1,\ \rho_0 = 2$ и для матрицы G в (14) имеем выражение

$$G(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha_1\xi_1^2 + \alpha_3\xi_2^2 & (\alpha_1 - \alpha_3)\xi_1\xi_2 \\ (\alpha_1 - \alpha_3)\xi_1\xi_2 & \alpha_3\xi_1^2 + \alpha_1\xi_2^2 \end{pmatrix}.$$

Соответственно в формуле (15) следует положить

$$k = \frac{2}{\alpha_1 + \alpha_3}\ , \qquad p(t,\xi) = \frac{n_1(t)\xi_1 + n_2(t)\xi_2}{|\xi|^4}\ .$$

Литература

1. Лехницкий Г.Г. Теория упругости анизотропного тела / Г.Г. Лехницкий. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.

2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости /В.Д. Купрадзе. – М.: Физматгиз, 1963.

3. Abapolova E.A, Soldatov A.P. Lame system of elasticity theory in a plane orthotropic medium // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – 157;3. – P.387-394.

4. Солдатов А.П., О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения. – 2003. – 39;5. – С.674-686.

5. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики (2 изд) / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1982.

6. Soldatov A.P., To the theory of anisotropic plane elasticity // Analysis by Oldenbourg Wissenschaftsverlags. – 2010. – 30(2). – P.107-117.

EXPLICIT EXPRESSION OF DOUBLE LAYER GENERALIZED POTENTIAL OF PLANE ORTHOTROPIC ELASTICITY

E.A. Abapolova, A.P. Soldatov

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:soldatov@bsu.edu.ru

Abstract. It is shown that the kernel of generalized double layer potential for the Lame system in the plane orthotropic medium depends only on elasticity modulus and it is found its explicit expression. The isotropic case is studied also.

Key words: double layer potential, orthotropic and isotropic media, uniform matrix-functions, elasticity modulus.

УДК 519.3

СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОДПРОСТРАНСТВА

В.И. Коробов, О.А. Тарасова

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua,
Tarasova_O@bsu.edu.ru

Аннотация. В работе исследована стабилизация линейных автономных систем относительно подпространства и построены примеры стабилизирующих систем на основе критерия стабилизации систем относительно подпространства.

Ключевые слова: управляемая система, критерий Калмана, стабилизируемая система, критерий стабилизации.

1. Введение. За последние годы современная теория управления получила быстрое развитие, и теперь она по общему признанию является мощным практическим инструментом для решения задач в выборе управления объектами различной природы (движущимися объектами, химическими реакциями. В настоящее время основными чертами задач управления являются большая сложность объектов, а также высокие требования к точности и динамике управления. Так, например, развитие авиации и ракетно-космической техники обусловило постановку и необходимость решения принципиально новых проблем: управление многосвязными объектами, построение оптимальных систем стабилизации, управление системами при неполной информации. Это привело к интенсивной разработке и широкому практическому применению таких разделов теории, как оптимальное управление. В этой области проводились многочисленные исследования российскими и зарубежными авторами. Я отмечу работы: Красовского Н.Н. [1], Благодатского В.И., Скляра Г.М., Коробова В.И.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu\,, \tag{1}$$

где A, B – постоянные вещественные матрицы с размерамми $n\times n$ и $n\times r$, соответственно; x – вектор n-мерного пространства E_n; u – вектор r-мерного пространства E_r [2]. Нам понадобятся следующие определения.

Система (1) называется полностью управляемой за время T [3], если для любых точек x_0, $x_T \in R^n$ существует допустимое управление $u(t)$ такое, что траектория системы (1), начинающаяся в начальный момент времени $t_0 = 0$ в точке $x(0) = x_0$, оканчивается в момент времени в точке $x(T) = x_T$.

Критерий Калмана: *Автономная управляемая линейная система (1) в* R^n *управляема тогда и только тогда, когда ранг* $(n \times nm)$*-матрицы* $[B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$ *равен* n *[4].*

Нулевое решение системы $\dot{x} = f(x), f(0) = 0$, называется *устойчивым*, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, t \geqslant 0$.

Нулевое решение *асимптотически устойчиво*, если:

1) оно устойчиво,

2) $x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.

Управляемая система

$$\dot{E} = f(x, u)\,, \qquad f(0, 0) = 0 \tag{2}$$

называется *стабилизируемой*, если существует такое управление $u = u(x)$, что его нулевое решение системы $\dot{x} = f(x, u(x))$ асимптотически устойчиво.

Вопрос стабилизации в ноль хорошо изучен. Мы рассмотрим стабилизацию относительно подпространства.

Зададим подпространство G равенством $G = \{x : Hx = 0\}$, где H – постоянная матрица. Систему (1) назовем *стабилизируемой относительно подпространства* G, если существует такое линейно зависящее от x управление $u = Qx$ (Q – постоянная матрица размера $r \times n$), что $Hx(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$, где $x(t)$ – любое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + BQx\,.$$

Пусть L – подпространство, натянутое на вектор-столбцы, составляющие матрицу $(B, AB, ..., A^{n-1}B)$. При этом полагаем $L \neq R^n$, $R^n = L + L^{\perp}$. Так как L инвариантно относительно A, то ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно A^*. Введем в $L^{\perp}$ канонический базис из вещественных частей собственных и корневых векторов A^*.

Корневым вектором линейного преобразования A, действующим в пространстве L над полем K, для данного собственного значения $\lambda \in K$ называется такой ненулевой вектор $x \in L$, что для некоторого натурального числа m

$$(A - \lambda E)^m x = 0$$

Если число m является наименьшим из таких натуральных чисел (то есть $(A - \lambda E)^{m-1} x \neq 0$), то m называется высотой корневого вектора x. В частности, собственный вектор это корневой вектор высоты один. Тогда $L^{\perp}$ можно представить в виде $L^{\perp} = K^- + K^+$, где K^- – подпространство, определяемое вещественными частями корневых векторов матрицы A^* из $L^{\perp}$, отвечающих собственным значениям λ с $\mathrm{Re}\lambda < 0$, а K^+ – подпространство, определяемое вещественными частями корневых векторов матрицы A^* из $L^{\perp}$, отвечающих собственным значениям λ с $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$.

2. Критерий стабилизации системы относительно подпространства.

Лемма 1: *Для произвольных: вектора g^- [5], управления $u(x)$ и начального условия x_0, решение $x(t)$ системы* (1) *удовлетворяет соотношению*

$$(g^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \ .$$

Лемма 2: *Если $g^+ \neq 0$, то существует начальное условие x_0 такое что, решение $x(t)$ системы* (1) *с произвольным управлением $u(x)$ удовлетворяет соотношению $(g^+, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.*

Лемма 3: *Если система* (1) *стабилизируема относительно подпространства $\{x : (g, t) = 0\}$ и если вектор g ортогонален всем столбцам матрицы $(B, AB, ..., A^{j-1}B)$, то любое решение системы* (1) *со стабилизирующим управлением $u = Qx$ удовлетворяет соотношениям $(A^{*i}g, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ $(i = 0, 1, ..., j)$.*

Приведем критерий стабилизации системы относительно подпространства. Критерий изложен в теореме.

Теорема [5]: *Для стабилизируемости системы*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ необходимо и достаточно, чтобы либо $H^* \subset K^-$, либо существовали вектор c и неотрицательное число j такие, что $H^* \subset L\{c, A^*c, ..., A^{*j}c\} + K^-$, причем $\left(c, A^k b\right) = 0$ $(0 \leqslant k < j)$. $(c, A^j b) \neq 0$.

□ *Необходимость.* Предположим что, система (1) стабилизируема относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ управлением $u = Qx$. Если $H^* \subset K^-$, то необходимость доказана.

Пусть теперь $H^* \subset K^-$. Обозначим столбцы матрицы H^* через h_i. Рассмотрим полученные в соответствии с обозначением $g = g^- + g^M$ векторы h_i^M. Пусть q – максимальное число линейно независимых векторов системы $\left\{h_i^M\right\}$. Очевидно, $q \geqslant 1$. Не нарушая общности, будем считать, что векторы $h_1, ..., h_q$ линейно независимы и обозначим $H^{*(1)} = (h_1^M, h_2^M, ..., h_q^M)$.

Докажем, что существуют постоянные α_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$, не равные нулю одновременно и такие, что для некоторого $j \geqslant q-1$ вектор $\tilde{c} = \sum_{i=1}^q \alpha_i h_i^M$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} (\tilde{c}, b) &= \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, b) = 0 \ , \\ (\tilde{c}, Ab) &= \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, Ab) = 0 \ , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\tilde{c}, A^{j-1}b) &= \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, A^{j-1}b) = 0 \ . \end{aligned} \tag{3}$$

$$(\tilde{c}, A^j b) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i^M, A^j b) \neq 0 \ . \tag{4}$$

Действительно, при $j = q - 1$ система (3) имеет нетривиальное решение, как однородная линейная система $q - 1$ уравнений с q неизвестными, т.е. существует ненулевой вектор $\tilde{c}$, удовлетворяющий системе (4). Если при данном j удовлетворяется соотношение (4), то нужный вектор построен. В противном случае вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет системе (3) при $j = q$. Если соотношение (4) удовлетворяется, то вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет нужным требованиям при $j = q$. В противном случае снова увеличиваем j на единицу и повторяем рассуждения.

Докажем, что при некотором $j \leqslant n$ вектор $\tilde{c}$ удовлетворяет соотношению (4). Предположим противное, т. е. вектор $\tilde{c}$ ортогонален $b, Ab, ..., A^{n-1}b$ и, следовательно, $\tilde{c} \in L^{\perp}$. При этом по построению $\tilde{c}^- = 0$. Таким образом, $\tilde{c} = \tilde{c}^+ \neq 0$. Поэтому по лемме 2 при произвольном управлении $u(x)$ найдется x_0 такое, что $(\tilde{c}, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

Но

$$\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i, x(t) \right) = \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^M + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^-, x(t) \right) = (\tilde{c}, x(t)) + \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i h_i^-, x(t) \right) .$$

И так как второе слагаемое по лемме 1 стремится к нулю, то

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i (h_i, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

при любом управлении $u(x)$, что противоречит стабилизируемости системы.

Итак, требуемый вектор $\tilde{c}$ построен. Возможны два случая:

1. $H^{*(1)} \subset L\left\{\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c})^M, ..., (A^{*j}\tilde{c})^M\right\}$.
2. $$H^{*(1)} \subset L\left\{\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c})^M, ..., (A^{*j}\tilde{c})^M\right\} \ . \tag{5}$$

В первом случае имеет место включение

$$H^* \subset L\left\{\tilde{c}, A^*\tilde{c}, ..., A^{*j}\tilde{c}\right\} + K^-, \tag{6}$$

что докажет необходимость условия теоремы. Для доказательства этого включения, возьмем любой вектор h_i. Тогда

$$h_i^M \in L\left\{\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c})^M, ..., (A^{*j}\tilde{c})^M\right\} ,$$

то есть

$$h_i^M = \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^M \ .$$

Имеем

$$h_i = h_i^M + h_{\bar{i}} = \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^M + h_{\bar{i}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c}) - \sum_{k=0}^{j} \beta_k^i (A^{*k}\tilde{c})^- + h_{\bar{i}} \in L\left\{\tilde{c}, A^*\tilde{c}, ..., A^{*j}\tilde{c}\right\} + K^- .$$

Во втором случае рассмотрим матрицу $H^{*(2)} = \left(H^{*(1)}\tilde{c}^M, (A^*\tilde{c}), ..., (A^{*j}\tilde{c})^M\right)$. Докажем, что ранг этой матрицы, который обозначим через q_2, больше или равен $q+1$. Для этого достаточно доказать, что $j+1$ векторов $\tilde{c}^M, ..., (A^{*j}\tilde{c})^M$ линейно независимы. Пусть

$$\sum_{k=0}^{j} \delta_k \left(A^{*k}\tilde{c}\right)^M = 0 .$$

Умножим это равенство скалярно на вектор b:

$$0 = \sum_{k=0}^{j} \delta_k((A^{*k}\tilde{c})^M, b) = \sum_{k=0}^{j} \delta_k(A^{*k}\tilde{c}, b) - \sum_{k=0}^{j} \delta_k((A^{*k}\tilde{c})^-, b).$$

Так как $(\left(A^{*k}\right)\tilde{c})^- \in L^\perp$, а $b \in L$, то

$$\sum_{k=0}^{j} \delta_k \left(A^{*k}\tilde{c}, b\right) = 0 .$$

Пользуясь (3), получаем $\delta_j\left(A^{*j}\tilde{c}, b\right) = 0$, а, используя (4), получаем $\delta_j = 0$.

Умножим равенство

$$\sum_{k=0}^{j-1} \delta_k \left(A^{*k}\tilde{c}\right)^M = 0$$

на вектор Ab. Как и выше, получим

$$0 = \sum_{k=0}^{j-1} \delta_k(\left(A^{*k}\tilde{c}\right)^M, Ab) = \sum_{k=0}^{j-1} (A^{*k}\tilde{c}, Ab)\delta_k = \delta_{j-1}(A^{*j}\tilde{c}, b) ,$$

откуда $\delta_{j-1} = 0$. Продолжая этот процесс, получим, что все коэффициенты δ_k равны нулю.

Таким образом, в силу (5) ранг $H^{*(2)}$ больше или равен $j+2 \geqslant q+1$.

Докажем, что для любого столбца $h_i^{(2)}$ матрицы $H^{*(2)}$ и любого решения $x(t)$ системы (1) со стабилизирующим управлением $u = Qx(h_i^{(2)}, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$. Для столбцов матрицы $H^{*(1)}$ это следует из условия стабилизируемости и леммы 1:

$$(h_i^{(1)}, x(t)) = (h_i^M, x(t)) = (h_i, x(t)) - (h_i^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 .$$

Таким образом, система (1) стабилизируема на подпространство $\{x : (\tilde{c}, x) = 0\}$ тем же управлением $u = Qx$. Следовательно, согласно лемме 3, $(A^{*k}c, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ $(k = 0, 1, ..., j)$. Окончательно имеем

$$((A^{*k}\tilde{c})^M, x(t)) = (A^{*k}\tilde{c})^M, x(t)) - ((A^{*k}\tilde{c})^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0\,.$$

Повторяя все рассуждения, относящиеся к матрице $H^{*(1)}$ применительно к матрице $H^{*(2)}$, получим, что либо при некотором векторе $\tilde{c}_2$ и числе j_2 выполнено соотношение $H^{*(2)} \subset L\{\tilde{c}_2^M, (A^*\tilde{c}_2)^M, ..., (A^{*j_2}\tilde{c}_2)^M\}$, т.е. $H^* \subset L\{\tilde{c}_2, A^*\tilde{c}_2, ..., A^{*j_2}\tilde{c}_2\} + K^-$, либо можно построить матрицу $H^{*(3)}$, ранг которой не меньше $q_2 + 1 \geqslant q + 2$:

$$H^{*(3)} = (H^{*(2)}, \tilde{c}_2^M, (A^*\tilde{c}_2)^M, ..., (A^{*j_2}\tilde{c}_2)^M).$$

Этот процесс построения матриц $H^{*(k)}$ с увеличивающимся рангом должен обязательно оборваться на соотношении типа (6), так как ранг любой системы n-мерных векторов не превышает n.

Достаточность. Пусть существует вектор c и число j такие, что

$$H^* \subset L\{c, A^*c, ..., A^{*j}c\} + K^-, (c, A^k b) = 0, (0 \leqslant k \leqslant j), (c, A^j b) \neq 0\,.$$

Введем переменные y_m $(1 \leqslant m \leqslant j+1)$ следующим образом: $y_m = (A^{*m-1}c, x) = (c, A^{m-1}x)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 = \quad & (c, \dot{x}) = (c, Ax + bu) = (c, Ax) = y_2\,,\\
\dot{y}_2 = \quad & (c, A\dot{x}) = (c, A^2x + Abu) = (c, A^2x) = y\,,\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\dot{y}_j = \quad & (c, A^{j-1}\dot{x}) = (c, A^jx + A^{j-1}bu) = (c, A^jx) = y_{j+1}\,,\\
\dot{y}_{j+1} = \quad & (c, A^j\dot{x}) = (c, A^{j+1}x + A^jbu) = (c, A^{j+1}x) + (c, A^jb)u\,.
\end{aligned}$$

Выбирая

$$u = \frac{1}{(c, A^jb)}\left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1}\gamma_m(c, A^{m-1}x)\right] =$$

$$= \frac{1}{(c, A^jb)}\left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1}\gamma_m y_m\right]\,, \tag{7}$$

где положительные постоянные γ_m подобраны так, чтобы система

$$\dot{y}_1 = y_2, \qquad \dot{y}_2 = y_3, \qquad ..., \qquad \dot{y}_j = y_{j+1}, \qquad y_{j+1} = -\sum_{m=1}^{j+1}\gamma_m y_m$$

имела только экспоненциально убывающие решения.

По предположению для любого i существуют постоянные γ_m и вектор $q_i^- \in K^-$ такие, что $h_i = \sum_{m=1}^{j+1} \beta_m^i A^{*m-1}c + g_i^-$. Поэтому при управлении задаваемой формулой (7) для любого решения системы (1) получим $(h_i, x(t)) = \sum_{m=1}^{j+1} \beta_m^i y_m(t) + (g_i^-, x(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ при любом начальном условии x_0. Действительно, первое слагаемое стремится к нулю по выбору управления $u(x)$, а стремление к нулю второго слагаемого вытекает из леммы 1.

Если $H^* \subset K^-$, то стабилизируемость системы (1) относительно подпространства $G = \{x : Hx = 0\}$ также следует из леммы 1. ■

3. Алгоритм проверки возможности стабилизации системы. Приведем алгоритм, позволяющий проверить возможность стабилизации и, если стабилизация возможна, построить вектор c, найти число j и дать явный вид стабилизирующего управления $u = Qx$.

Пусть rank $H = l$. Напомним, что через h_i обозначены столбцы матрицы H^*, и, не нарушая общности, будем считать векторы $h_1, h_2, ..., h_l$ линейно независимыми [5]. В предлагаемый алгоритм состоит из ниже перечисленных шагов.

1. Находим базис K^-.

2. Вычисляем число $r = \operatorname{rank}\,(Hb, HAb, ..., HA^{n-1}b)$. Рассмотрим систему уравнений относительно $\omega_i\,(i = 1, 2, ..., l)$:

$$(\xi, b) = (\xi, Ab) = ... = (\xi, A^{n-1}b) = 0\,,$$

где $\xi = \sum_{i=1}^{l} \omega_i h_i$. Обозначим через $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{l-r}$ линейно независимые решения этой системы. Если хоть один из этих векторов не принадлежит K^-, то стабилизация относительно подпространства G невозможна.

3. Пусть все $\xi_j \in K^-$ (если при этом $r = 0$, то $H^* \subset K^-$ и возможна стабилизация при любом выборе управления $u(x)$, например при $u(x) \equiv 0$).

Дополним систему $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{l-r}$ векторами $h_{i_1}, h_{i_2}, ..., h_{i_r}$ до базиса в линейной оболочке $L\{h_1, ..., h_l\}$. Обозначим через $H^*_{(1)}$ матрицу $(h_{i_1}, h_{i_2}, ..., h_{i_r})$.

4. Рассмотрим систему уравнений относительно $a_1, a_2, ..., a_r$;

$$(c, b) = (c, Ab) = ... = (c, A^{j-1}b) = 0\,, \tag{8}$$

где

$$c = \sum_{k=1}^{r} a_k h_{i_k}\,,$$

а j таково, что ранг системы (8) равен $r-1$, в то время как ранг системы, полученной из (8) заменой j на $j+1$, равен r. При этом $j \geqslant r-1$ и $(c, A^j b) \neq 0$.

5. Проверяем, выполнено ли включение

$$H^*_{(1)} \subset L\{c, A^*c, ..., A^{*j}c\} + K^-\,. \tag{9}$$

Если (9) имеет место, то стабилизация возможна. Для построения стабилизирующего управления выберем такие постоянные $\gamma_i\,(i = 1, 2, ..., j+1)$, чтобы уравнение относительно $\mu\mu^{j+1} + \gamma_1\mu^j + ... + \gamma_{j+1} = 0$ имело все корни μ такие, что $\operatorname{Re}\mu < 0$.

Управление $u(x)$ задаем формулой

$$u = \frac{1}{(c, A^j b)} \left[-(c, A^{j+1}x) - \sum_{m=1}^{j+1} \gamma_m (c, A^{m-1}x) \right] . \tag{10}$$

6. Если включение (9) не имеет места, то строим матрицу $H^*_{(2)} = (H^*_{(1)}, c, A^*c, ..., A^{*j}c)$. Если число $r_2 = \text{rank}(H_{(2)}b, H_{(2)}Ab, ..., H_{(2)}A^{n-1}b)$ равно r, то стабилизация возможна.

Если же $r_2 \geqslant r + 1$, то, заменяя H на $H_{(2)}$, переходим к п.2 и повторяем по порядку все дальнейшие построения. В силу того, что r_k (если данный процесс дойдет до построения матрицы $H_{(k)}$) не может неограниченно увеличиваться ($r \leqslant n$), то на некотором обращении к пунктам 2.-6. обнаружится невозможность стабилизации, или выполнится включение типа (9). В этом случае стабилизирующее управление определяется формулой (10).

Проиллюстрируем действие представленного алгоритма на примере. Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + u \, , \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + u \, , \end{cases} \tag{11}$$

для которой

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Зададим матрицу $H = (2, 1)$. Тогда $\text{rank}\, H = l = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – столбец матрицы H^*.

1. Собственные значения матрицы $A^* - \lambda E$ равны ± 1 и им соответствуют собственные векторы (-1,1) и (-3,3). Тогда базис пространства K^- состоит из вектора $(-1, 1)$.

2. $r = \text{rank}\,(Hb, HAb) = \text{rank}\,(3, 3) = 1$.

Обозначим, $\xi = \omega_1 h_1$. Система уравнений относительно $\omega_1 : (\xi, b) = (\xi, Ab) = 0$ имеет вид $3\omega_1 = 0$, решение которой $\omega_1 = 0$.

3. Матрица $H^*_{(1)} = h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Обозначим $c = \alpha_1 h_1$.

Уравнение относительно $\alpha_1 : (c, b) = 3\alpha_1 \neq 0$ выберем в виде $(c, b) = 3$, откуда $\alpha_1 = 1, c = h_1, j = 0$.

5. Так как $H^*_{(1)} \subset L(c, A^*c) + K^- = R^2$, то стабилизация возможна.

Для построения стабилизирующего управления выберем постоянные γ_1 так, чтобы уравнение относительно $\mu : \mu + \gamma_1 = 0$ имело корни μ, подчинённые условию $Re\mu < 0$. Пусть $\gamma_1 = 1$. Тогда управление имеет вид:

$$u(x) = \frac{1}{(c, b)} \left[-(c, Ax) - \gamma_1 (c, x) \right] = \frac{1}{3} (-9x_1 + 3x_2).$$

Следовательно, матрица Q имеет вид Q = (-3,1).

Подставим полученное управление в систему (11). Тогда система $\dot{x} = (A + bQ)x$ принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2, \end{cases}$$

общее решение которой:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 e^{-t}, \\ x_2 = x_2^0 e^{-t}, \end{cases}$$

где $x_1^0 = x_1(0)$, $x_2^0 = x_2(0)$. Тогда $Hx = e^{-t}(2x_1^0 + x_2^0) \to 0$ при $t \to \infty$.

Литература

1. Красовский Н.Н. О стабилизации динамических систем дополнительными силами // Дифференциальные уравнения. – 1965. – 1;1. – С.5-6.

2. Коробов В.И. Критерии управляемости линейной системы на подпространство // Вестник Харьковского университета. – 1981. – 221;46. – С.3.

3. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление / В.И. Благодатских. – М: Высшая школа, 2001. – С.104-105.

4. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли. – М: Наука, 1972. – С.91-93.

5. Коробов В.И., Луценко А.В., Подольский Е.Н. Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства / – 1975. – С.117-122.

SYSTEM STABILIZATION RELATIVE TO SUBSPACE

V.I. Korobov, O.A. Tarasova

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua,
Tarasova_O@bsu.edu.ru

Abstract. Stabilization of linear autonomous systems relative to subspace are investigated and some examples of stabilizing systems connected with the criterion of system stabilization relative to subspace are constructed.

Key words: controlled system, Kalman's criterion, stabilized system, stabilization criterion.

УДК 517.968

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЯДРОМ КОШИ В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

А.П. Солдатов, Т.М. Урбанович

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия;
Полоцкий государственный университет,
ул. Блохина, 29, Новополоцк, 211440, Беларусь
e-mail:Soldatov@bsu.edu.ru, UrbanovichTM@gmail.com

Аннотация. Исследуется характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае (с особенностями нецелого порядка). Получены условия разрешимости и явная формула представления решения.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, задача линейного сопряжения.

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [1, с. 188]

$$c(t)\varphi(t) + \frac{d(t)}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

где коэффициенты $c(t)$, $d(t)$ принадлежат классу Гёльдера $H = H(\overline{\mathbb{R}})$ на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\bigcup\{\infty\}$. Более точно, функции $\varphi(t) \in H(\overline{\mathbb{R}})$ удовлетворяют условию Гёльдера

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq C\left|\frac{1}{t_1+i} - \frac{1}{t_2+i}\right|^{\mu}, \quad t_j \in \mathbb{R}\,,$$

с некоторыми постоянными $C > 0$ и $0 < \mu < 1$. В частности, функция $\varphi(t)$ допускает предел $\varphi(\infty) = \lim \varphi(t)$ при $t \longrightarrow \infty$. При дробно-линейной подстановке, переводящей прямую $\mathbb{R}$ на единичную окружность L, класс $H(\overline{\mathbb{R}})$ переходит в класс $H(L)$.

Уравнение (1) является уравнением нормального типа, если $c(t) \pm d(t) \neq 0$ всюду на $\overline{\mathbb{R}}$. Хорошо известно [1, с. 188], что в этом случае, с помощью сведения к эквивалентной задаче линейного сопряжения, уравнение (1) допускает эффективное решение в классе $H^0 = \big\{\varphi(t) \in H(\overline{\mathbb{R}})|\ \varphi(\infty) = 0\big\}$.

Исключительный случай уравнения (1) возникает, когда функции $c(t) \pm d(t)$ допускают нули в конечном числе точек действительной прямой:

$$\begin{aligned} &(c+d)(t) = O\left(|t-a_j|^{\alpha_j}\right) \quad \text{при} \quad t \to a_j, \quad j = 1,2,...,m, \\ &(c-d)(t) = O\left(|t-b_k|^{\beta_k}\right) \quad \text{при} \quad t \to b_k, \quad k = 1,2,...,n, \end{aligned} \tag{2}$$

где $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ и $a_j \neq b_k$.

В случае целых положительных α_j, β_k, в предположении (2) и гладкого замкнутого контура интегрирования Γ, уравнение (1) методом сведения к эквивалентной задаче линейного сопряжения было впервые рассмотрено Ф.Д. Гаховым [2] и Л.А. Чикиным [3].

Д.И. Шерман [4], [5] независимо от работ [2] и [3] другим методом дал исследование исключительных случаев уравнений с ядром Коши в предположении, что только одна из функций $(c \pm d)(t)$ имеет нули целых порядков на контуре Γ.

В данной работе рассматривается исключительный случай характеристического сингулярного интегрального уравнения (1) в предположении, что функции $(c \pm d)(t)$ имеют на контуре нули нецелых порядков, причём $0 < \alpha_j < 1$, $0 < \beta_k < 1$.

Положим

$$A(t) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{t - a_j}{t - a'_j} \right)^{\alpha_j}, \ B(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{t - b_k}{t - b'_k} \right)^{\beta_k},$$

где точки a'_j,$b'_k \in \mathbb{C}$ лежат вне действительной оси и ветви соответствующих степенных множителей выбраны с разрезом вдоль отрезков $\left[a_j,\ a'_j\right]$, $[b_k,\ b'_k]$. В этих обозначениях условия (2) уточняются следующим образом:

$$(c + d)(t) = r(t)A(t), \quad (c - d)(t) = s(t)B(t),$$

где функции $r(t)$, $s(t)$ принадлежат классу $H(\overline{\mathbb{R}})$ и всюду отличны от нуля.

Предполагая $f \in H$ и $f(\infty) = 0$, решение уравнения (1) будем отыскивать в классе $H^* = H^*(\overline{\mathbb{R}})$ функций, которые принадлежат H вне любой окрестности точек a_j и b_k и допускают в этих точках слабые особенности. Более точно, этот класс состоит из функций вида

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0(t)}{(t - a_1) \cdots (t - a_m)(t - b_1) \cdots (t - b_n)} + \varphi_1(t)\,,$$

где $\varphi_0, \varphi_1 \in H$ и $\varphi_0(a_j) = \varphi_0(b_k) = 0$ для всех k, j.

Введем индекс Коши

$$\text{æ} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{s(t)}{r(t)} \bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

и рассмотрим функцию

$$h(t) = \ln \frac{s(t)}{r(t)} - \text{æ} \ln \left(\frac{t - i}{t + i} \right),$$

которая, очевидно, принадлежит классу $H(\overline{\mathbb{R}})$. Хорошо известно [1], [6], что тогда интеграл типа Коши

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\tau) - h(\infty)}{\tau - z} d\tau\,, \qquad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}\,,$$

принадлежит классу $H(\overline{D^{\pm}} \cup \infty)$ в каждой из полуплоскостей $D^{\pm} = \{\pm \mathrm{Im} z > 0\}$. Положим

$$X(z) = \begin{cases} \exp[H(z)], & \mathrm{Im} z > 0, \\ \exp[H(z)] \left(\dfrac{z + i}{z - i} \right)^{\text{æ}}, & \mathrm{Im} z < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $X^{\pm}(t) \in H(\overline{\mathbb{R}})$ и всюду отлична от нуля, причём

$$X^{+}(t) = \frac{s(t)}{r(t)} X^{-}(t). \tag{3}$$

Представим $A(t)$, $B(t)$ в следующем виде:

$$A(t) = A_{+}(t)A_{-}(t)\,, \qquad B(t) = B_{+}(t)B_{-}(t)\,,$$

где

$$A_{\pm}(z) = \prod_{\pm Im a'_j<0} \left(\frac{z-a_j}{z-a'_j}\right)^{\alpha_j}, \qquad B_{\pm}(z) = \prod_{\pm Im b'_k<0} \left(\frac{z-b_k}{z-b'_k}\right)^{\beta_k},$$

и введём сингулярный оператор

$$(Nf)(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A(t)r(t)} + \frac{1}{B(t)s(t)}\right) f(t) \ + $$

$$+ \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A(t)r(t)} - \frac{1}{B(t)s(t)}\right) \frac{Y(t)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau-t)} d\tau\,,$$

где $Y(t) = r(t)A_{-}(t)B_{+}(t)X^{+}(t)$.

Теорема 1. *Пусть $f \in H(\overline{\mathbb{R}})$ и $f(\infty) = 0$. Тогда при æ ≥ 0 уравнение (1) безусловно разрешимо в классе $\{\varphi \in H^{*}(\overline{\mathbb{R}}),\ \varphi(\infty) = 0\}$, и его общее решение даётся формулой*

$$\varphi(t) = (Nf)(t) + \left(\frac{1}{A(t)r(t)} - \frac{1}{B(t)s(t)}\right) \sum_{k=1}^{æ} p_k \frac{Y(t)}{(t+i)^k} \tag{4}$$

с произвольными коэффициентами $p_k \in \mathbb{C}$.

Если æ < 0, то для существования решения необходимо и достаточно выполнение $-$æ условий разрешимости

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau+i)^{k+1}} d\tau\,, \qquad k = 0, 1, \ldots, -æ - 1\,, \tag{5}$$

и (единственное) решение уравнения (1) даётся равенством $\varphi(t) = (Nf)(t)$.

□ Введём кусочно-аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau\,,$$

заданную интегралом типа Коши, плотностью которого служит искомое решение характеристического уравнения (1).

Согласно формулам Сохоцкого, имеем

$$\varphi(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t)\,, \qquad \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t)\,. \tag{6}$$

Подставив эти формулы в уравнение (1), получим, что кусочно-аналитическая функция $\Phi(z)$ должна являться решением задачи линейного сопряжения

$$A(t)r(t)\Phi^+(t) - B(t)s(t)\Phi^-(t) = f(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{7}$$

□ Введём кусочно-аналитическую функцию

$$\Psi(z) = \begin{cases} A_+B_+^{-1}(z)\Phi(z), \ \mathrm{Im} z > 0, \\ \\ B_-A_-^{-1}(z)\Phi(z), \ \mathrm{Im} z < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда краевое условие (7) перепишется в виде

$$\Psi^+(t) - G(t)\Psi^-(t) = g(t)\,, \tag{9}$$

где

$$G(t) = \frac{s(t)}{r(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{A_-(t)B_+(t)r(t)}\,.$$

В этих обозначениях (3) можно записать в форме $X^+ = GX^-$, причем $X(z)$ представима в виде $X(z) = (z+i)^{æ}X_0(z)$, где X_0 аналитична вне действительной прямой и всюду отлична от нуля. Поэтому общее решение задачи (9) дается формулой

$$\Psi(z) = X(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau - z)}d\tau + \sum_{k=1}^{æ}\frac{p_k}{(z+i)^k}\right),$$

где учтено, что $g/X^+ = f/Y$ и функция f удовлетворяет условиям ортогональности (5), обеспечивающим отсутствие полюса функции Ψ в точке $z = -i$. Конечно, при $æ \geqslant 0$ эти условия отсутствуют, а при $æ \leqslant 0$ отсутствует сумма с p_k.

Таким образом, при $æ > 0$ краевая задача (9) безусловно разрешима и её решение зависит линейно от æ произвольных постоянных. При $æ \le 0$ решение задачи (9) единственно, причём при $æ < 0$ для существования решения необходимо и достаточно выполнение $-æ$ условий разрешимости (5).

Из формулы (8) следует, что

$$\Phi^+(t) = \frac{B_+(t)}{A_+(t)}\Psi^+(t)\,, \quad \Phi^-(t) = \frac{A_-(t)}{B_-(t)}\Psi^-(t)\,.$$

Таким образом, по формулам (6) найдём решение сингулярного интегрального уравнения (1):

$$\varphi(t) = \frac{B_+(t)}{A_+(t)}\Psi^+(t) - \frac{A_-(t)}{B_-(t)}\Psi^-(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{B_+(t)}{A_+(t)}X^+(t)\left(\frac{g(t)}{X^+(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau - t)}d\tau + p(t)\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{A_-(t)}{B_-(t)}X^-(t)\left(-\frac{g(t)}{X^+(t)} + \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau - t)}d\tau + p(t)\right),$$

где положено

$$p(t) = \sum_{k=1}^{æ} \frac{p_k}{(t+i)^k} \,.$$

В результате, после элементарных преобразований, приходим к выражению (4) для общего решения задачи (1), что завершает доказательство теоремы. То, что это решение принадлежит классу $\{\varphi \in H^*,\ \varphi(\infty) = 0\}$, следует из общих свойств интеграла типа Коши [1], [6]. ■

Принадлежность решения φ классу H^* в теореме можно несколько уточнить. Воспользуемся следующим свойством интеграла типа Коши.

Лемма 1. *Пусть $f \in H[-2,2]$ и функция t^α, $0 < \alpha < 1$, на вещественной прямой понимается как граничное значение аналитической функции z^α, рассматриваемой в верхней или нижней полуплоскости. Тогда функция*

$$g(t_0) = \frac{t_0^\alpha}{\pi i} \int_{-2}^{2} \frac{f(t)dt}{t^\alpha(t-t_0)} \,, \qquad -1 \leqslant t_0 \leqslant 1 \,, \tag{10}$$

принадлежит классу $H[-1,1]$.

□ Запишем $g = g_0 + g_1$, где

$$g_1(t_0) = f(0)\frac{t_0^\alpha}{\pi i} \int_{-2}^{2} \frac{dt}{t^\alpha(t-t_0)} \,,$$

$g_0(t_0)$ определяется по $f(t) - f(t_0)$ аналогично (10). Тогда, в силу известных свойств интеграла типа Коши [1], [6], функция $g_0 \in H[-1,1]$ и $g_0(0) = 0$. С другой стороны, по теореме Коши

$$\int_{-2}^{2} \frac{dt}{t^\alpha(t-z)} + \int_L \frac{dt}{t^\alpha(t-z)} = 0 \,, \quad \mathrm{Im} z < 0 \,,$$

где L — дуга окружности $\{|z| = 2, \mathrm{Im} z > 0\}$. Поэтому по формуле Сохоцкого-Племеля

$$g_1(t_0) = f(0)\left[1 - t_0^\alpha \int_{-2}^{2} \frac{dt}{t^\alpha(t-t_0)}\right] \in H[-1,1] \,,$$

так что и функция g принадлежит классу $H[-1,1]$. ■

Лемма 2. *Оператор $f(t) \to A(t)B(t)(Nf)(t)$ инвариантен в классе $\{f \in H(\overline{\mathbb{R}}),\ f(\infty) = 0\}$.*

□ Выполним элементарные преобразования:

$$A(t)B(t)(Nf)(t) = \frac{A(t)B(t)}{2}\left(\frac{1}{A(t)r(t)} + \frac{1}{B(t)s(t)}\right) f(t) +$$

$$+\frac{A(t)B(t)}{2}\left(\frac{1}{A(t)r(t)} - \frac{1}{B(t)s(t)}\right) \frac{Y(t)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau - t)} d\tau =$$

$$= \frac{c(t)f(t)}{r(t)s(t)} - \frac{d(t)}{r(t)s(t)} \frac{Y(t)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau)}{Y(\tau)(\tau - t)} d\tau \,.$$

По условию функции $c(t)$, $d(t)$, $r(t)$, $s(t)$ всюду отличны от нуля и принадлежат классу $H(\overline{\mathbb{R}})$ и этим же свойством обладает функция $X^+(t)$. Поэтому нужно только проверить, что в классе $f(t) \in H$, $f(\infty) = 0$ инвариантен сингулярный оператор

$$(S^* f)(t) = \frac{Y(t)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau) d\tau}{Y(\tau)(\tau - t)} \ ,$$

где, напомним, $Y = rA_- B_+ X^+$. В силу известных свойств сингулярного интеграла [6] достаточно убедиться, что $(S^* f)(t_0) \in H$ в окрестности точек a_j и b_k, фигурирующих в определении A_- и B_+. Зафиксируем для определенности одну из этих точек $a = a_j$ и выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, что остальные точки a_i и b_k лежат вне отрезка $[-2\varepsilon + a, a + 2\varepsilon]$. Тогда на этом отрезке можем записать

$$Y(t) = \widetilde{Y}(t)(t - a)^{\delta}, \quad \delta = \delta_j \,,$$

где $\widetilde{Y} \in H[-2\varepsilon + a, a + 2\varepsilon]$ и в соответствии с определением A_- функция $(t - a)^{\delta}$ определяется по ее непрерывной ветви в верхней полуплоскости. В частности, $\widetilde{f}(t) = f(t)\widetilde{Y}^{-1}(t) \in H[-2\varepsilon + a, a + 2\varepsilon]$. В этих обозначениях

$$(S^* f)(t) = \widetilde{Y}(t_0)\widetilde{g}(t) + g_0(t), \quad -\varepsilon + a \leqslant t_0 \leqslant a + \varepsilon \,,$$

с некоторой функцией $g_0 \in H[-\varepsilon + a, a + \varepsilon]$ и

$$\widetilde{g}(t) = \frac{(t - a)^{\delta}}{\pi i} \int_{-2\varepsilon + a}^{a + 2\varepsilon} \frac{\widetilde{f}(\tau) d\tau}{(\tau - a)^{\delta}(\tau - t)} \ .$$

Остается заметить, что на основании леммы 1 функция $\widetilde{g} \in H[-\varepsilon + a, a + \varepsilon]$. ■

Заключение. В работе исследовано характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши в исключительном случае (с особенностями нецелого порядка) методом сведения к эквивалентной задаче линейного сопряжения. Получены условия разрешимости и явная формула представления решения.

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения // Известия Казанского физ-матем. общества – 1949. – 14;3. – С.75-160.

3. Чикин Л.А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Учёные записки Казанского гос. ун-та им. В.И. Ульянова-Ленина. – 1953. – 113;10. – С.57-105.

4. Шерман Д.И. Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1951. – 15;1. – С.75-82.

5. Шерман Д.И. О приёмах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений // Прикладная математика и механика. – 1948. – 12;4. – С.423-452.

6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

CHARACTERISTIC SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH THE CAUCHY KERNEL IN EXCEPTIONAL CASE

A.P. Soldatov, T.M. Urbanovich

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia;
Polotsk State University,
Blohina St., 29, Novopolotsk, 211440, Belarus,
e-mail:Soldatov@bsu.edu.ru, UrbanovichTM@gmail.com

Abstract. Characteristic singular integral equation with the Cauchy kernel in the exceptional case (with singularities of noninteger order) is investigated. The solvability conditions and the explicit solution formula are obtained.

Key words: characteristic singular integral equation with the Cauchy kernel, linear conjugation problem.

УДК 511.35

О СУММИРОВАНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ ДЕЛИТЕЛЕЙ В АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

М.В. Шевцова

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: shevtsova@bsu.edu.ru

Аннотация. Найдена асимптотическая формула для сумм значений функций $\tau(n)$ и $\tau_3(n)$ по числам, лежащим в арифметической прогрессии.

Ключевые слова: схема решения тернарной аддитивной задачи, оценка Виноградова-Пойа.

1. Введение. Пусть $\tau_k(n)$ – число решений в целых положительных числах $n_1, \ldots, n_k$ уравнения

$$n_1 \ldots n_k = n\,.$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\,,\\ n\equiv l \pmod D}} \tau_k(n)\,. \tag{1}$$

Ряд авторов занимались проблемой получения асимптотической формулы для этой суммы. В работе [1] эта задача решена для $k \geqslant 4$, $(l, D) = 1$ и $D \leqslant X^{\alpha/k}$ ($\alpha > 0$ – константа):

$$\sum_{\substack{n\leqslant X\,,\\ n\equiv l \pmod D}} \tau_k(n) = \frac{X}{\varphi(D)} P_{k-1}(\ln X) + R\,, \tag{2}$$

где $P_{k-1}(z)$ – многочлен степени $k-1$ от переменной z с коэффициентами, зависящими от k и D.

Иванец [2] на основе модулярной техники получил асимптотическую формулу в случае
$k = 2$, справедливую при $D \leqslant X^{2/3-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ и произвольно мало), и совместно с Фридлендером, – для $k = 3$ [3], справедливую при $D \leqslant X^{\frac{1}{2}+\frac{1}{230}}$.

С ростом параметров k и D задача получения асимптотики усложняется, так как прогрессия становится более редкой. В 1970 году А. А. Карацуба разработал новый метод решения мультипликативных тернарных задач [4]. Применяя этот метод, М. М. Петечук [5] получил для суммы (1) асимптотическую формулу в случае модуля специального вида $D = p_0^m$ ($p_0 \geqslant 3$ – фиксированное простое число), где $D \leqslant X^{3/8-\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$ – произвольно мало).

В настоящей статье дана элементарная оценка R в формуле (2) для $k=2$, $k=3$ и произвольного модуля D. Она опирается на идею А. А. Карацубы, которая позволяет оценивать остаточный член асимптотической формулы по схеме аддитивной тернарной задачи. Полученный результат формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема.

1. *При $k=2$ формула (2) справедлива для $D \leqslant X^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}$ ($\varepsilon_1 > 0$ сколь угодно малое число).*

2. *При $k=3$ формула (2) справедлива для $D \leqslant X^{\frac{4}{9}-\varepsilon_2}$ ($\varepsilon_2 > 0$ сколь угодно малое число).*

При доказательстве используется следующая

Лемма. (Виноградова-Пойа) *Пусть χ – примитивный характер по модулю D. Тогда справедлива оценка:*

$$\left|\sum_{u \leq a} \chi(u)\right| \leqslant \sqrt{D} \ln D\,.$$

Доказательство см. в [6, с. 123].

2. Доказательство теоремы. Пусть $k=2$. Тогда из ортогональности характеров имеем:

$$\sum_{\substack{n \leqslant X,\\ n \equiv l \pmod D}} \tau(n) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \pmod D} \overline{\chi}(l) \sum_{n_1 n_2 \leqslant X} \chi(n_1 n_2)\,.$$

Выделим слагаемое с χ_0:

$$\sum_{\substack{n \leqslant X,\\ n \equiv l \pmod D}} \tau(n) = W + R\,,$$

где

$$W = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\substack{n_1 n_2 \leqslant X,\\ (n_1,D)=1,\,(n_2,D)=1}} 1\,, \qquad R = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{n_1 n_2 \leqslant X} \chi(n_1 n_2)\,.$$

Тогда

$$W = \frac{X}{\varphi(D)} \prod_{p\,|\,D} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 (\ln X + 2\gamma - 1) + O\left(\frac{X^{3/4}}{\varphi(D)}\right)\,,$$

где γ – константа Эйлера.

Оценим сумму R, представив ее как сумму $\ll \ln^2 X$ слагаемых вида:

$$S = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi}(l) \sum_{\substack{N_1 < n_1 \leqslant 2N_1\\ n_1 n_2 \leqslant X}} \sum_{N_2 < n_2 \leqslant 2N_2} \chi(n_1 n_2)\,.$$

Пусть $N_1 \geqslant N_2$, $0<\delta\leqslant \frac{1}{4}$ – вещественное число. Если $N_2 \leqslant X^{\delta}$, то имеем:

$$S \ll \sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\left|\sum_{\substack{N_1<n_1\leqslant 2N_1,\\ n_1\leqslant X/n_2}}\chi(n_1)\right| \leqslant X^{\delta}\sqrt{D}\ln D \ll \sqrt{D}X^{2\delta} < \frac{X^{1-\delta}}{D}$$

при $D\leqslant X^{\frac{2}{3}-2\delta}$, то есть первое утверждение теоремы для этого случая доказано.

Если $N_2 > X^{\delta}$, то разобьем промежуток суммирования $(N_1, 2N_1]$ на промежутки длины $H'=\dfrac{N_1}{X^{2\delta}}$. В этом случае получим:

$$S \ll \sum^{N_1/H'} \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l) \sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\ \sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2,\\ n_2\leqslant Xn_1^{-1}}}\chi(n_1n_2)\,.$$

Заменим условие $n_2\leqslant Xn_1^{-1}$ на условие $n_2\leqslant XH^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_1:

$$R_1 \leqslant \sum^{N_1/H'}\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\ \sum_{\substack{X(H+H')^{-1}<n_2\leqslant XH^{-1},\\ n_2\equiv ln_1^{-1}\pmod D}} 1 + \sum^{N_1/H'}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\frac{X}{H^2}H' \ll$$

$$\ll \frac{X}{D}\left(\frac{H'^2}{H^2}\right)\left(\frac{N_1}{H'}\right) \ll \frac{X^{1-2\delta}}{D}\,.$$

В результате, находим:

$$S \ll X^{2\delta}\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\chi(n_1)\right|\right\}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\chi(n_2)\right| + O\left(\frac{X^{1-2\delta}}{D}\right).$$

Применив теперь неравенство Коши, имеем:

$$\sigma = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\chi(n_2)\right| \leqslant (\sigma_1)^{1/2},$$

где

$$\sigma_1 = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi \pmod D}\left|\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\chi(n_2)\right|^2.$$

Заметим, что σ_1 равняется числу решений сравнения

$$n_2\equiv n_2' \pmod D;\quad N_2<n_2, n_2'\leqslant 2\,N_2\,.$$

Число решений этого сравнения не превосходит величины

$$\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\ \sum_{\frac{N_2-n_2}{D}<d\leqslant\frac{2N_2-n_2}{D}} 1 \ll \sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\left(\frac{N_2}{D}+1\right) \ll \frac{N_2^2}{D}+N_2 .$$

Отсюда

$$\sigma \ll \frac{N_2}{\sqrt{D}}+\sqrt{N_2} .$$

Используя лемму , имеем:

$$S \ll X^{2\delta}\sqrt{D}\ln D\left(\frac{N_2}{\sqrt{D}}+\sqrt{N_2}\right) .$$

1. Если $N_2 \leqslant D$, то $S \ll \sqrt{N_2}\sqrt{D}X^{3\delta} \leqslant DX^{3\delta}$.

2. Если $N_2 > D$, то $S \ll \dfrac{N_2}{\sqrt{D}}\sqrt{D}X^{3\delta} < \sqrt{X}X^{3\delta}$.

Выберем $\varepsilon_1 = 5\delta$, тогда в обоих случаях $S < \dfrac{X^{1-\delta}}{D}$ при $D \leq X^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}$. Следовательно, первое утверждение теоремы полностью доказано.

Пусть $k = 3$. Используя ортогональность характеров и выделяя слагаемое с χ_0, получим:

$$\sum_{\substack{n\leqslant X,\\ n\equiv l \pmod D}} \tau_3(n) = W+R ,$$

где

$$W=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\substack{n_1n_2n_3\leqslant X,\\ (n_1,D)=1,\,(n_2,D)=1,\,(n_3,D)=1}} 1 , \qquad R=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{n_1n_2n_3\leqslant X}\chi(n_1n_2n_3) .$$

Тогда

$$W=\frac{X}{\varphi(D)}\prod_{p\,|D}\left(1-\frac{1}{p}\right)^3\left[\frac{\ln^2 X}{2!}+\ln X\left(3\gamma^2-1\right)+\left(3\gamma-3\gamma^2+1\right)\right]+O\left(\frac{X^{5/6}}{\varphi(D)}\right) .$$

Оценим сумму R, представив ее как сумму $\ll \ln^3 X$ слагаемых вида:

$$S=\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{\substack{N_1<n_1\leqslant 2N_1\\ n_1n_2n_3\leqslant X}}\ \sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\ \sum_{N_3<n_3\leqslant 2N_3}\chi(n_1n_2n_3) .$$

Пусть $N_1 \geqslant N_2 \geqslant N_3$, $0 < \delta \leqslant \dfrac{1}{6}$. Справедливы неравенства: $N_1N_2N_3 \ll X$, $N_1 \geqslant X^{1/3}$.

Если теперь $N_2 \leqslant X^{\delta}$, то $N_3 \leqslant X^{\delta}$. Следовательно, $S \ll \sqrt{D}\ln DX^{2\delta}$, и, очевидно, утверждение теоремы выполняется.

Пусть $N_2 > X^{\delta}$. Тогда, если $N_3 \leqslant X^{\delta}$, доказательство сводится к случаю $k = 2$, рассмотренному выше.

Пусть $N_3 > X^{\delta}$. Как и в случае $k = 2$, разобьем промежуток суммирования $(N_1, 2N_1]$ на промежутки длины $H' = \dfrac{N_1}{X^{2\delta}}$. Далее рассмотрим сумму

$$S' = \frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2\,,\\ n_2\leqslant X(Hn_3)^{-1}}}\sum_{N_3<n_3\leqslant 2N_3}\chi(n_1n_2n_3)\,.$$

Разобьем промежуток суммирования $(N_3, 2N_3]$ на промежутки длины $W' = \dfrac{N_3}{X^{2\delta}}$. Получим:

$$S' \ll \sum^{N_3/W'}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(l)\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\sum_{W<n_3\leqslant W+W'}\sum_{\substack{N_2<n_2\leqslant 2N_2,\\ n_2\leqslant X(Hn_3)^{-1}}}\chi(n_1n_2n_3)\,.$$

Заменим условие $n_2 \leqslant X(Hn_3)^{-1}$ на условие $n_2 \leqslant X(HW)^{-1}$ и оценим получившуюся при этом ошибку R_2:

$$R_2 \leqslant \sum^{N_3/W'}\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\sum_{W<n_3\leqslant W+W'}\sum_{\substack{X(H(W+W'))^{-1}<n_2\leqslant X(HW)^{-1},\\ n_2\equiv ln_1^{-1}n_3^{-1}\pmod D}}1\;+$$

$$+\sum^{N_3/W'}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\sum_{W<n_3\leqslant W+W'}\sum_{X(H(W+W'))<n_2\leqslant X(HW)^{-1}}1 \ll \frac{X^{1-2\delta}}{D}\left(\frac{H'}{H}\right).$$

Таким образом получаем:

$$S \ll X^{4\delta}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\chi(n_1)\right|\left|\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\chi(n_2)\right|\left|\sum_{W<n_3\leqslant W+W'}\chi(n_3)\right| + O\left(\frac{X^{1-2\delta}}{D}\right)\,.$$

Отсюда следует:

$$S \ll X^{4\delta}\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\chi(n_1)\right|\right\}\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\pmod D}\left|\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\chi(n_2)\right|\left|\sum_{W<n_3\leqslant W+W'}\chi(n_3)\right|$$

$$\leqslant X^{4\delta}\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\chi(n_1)\right|\right\}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ (\mathrm{mod}\ D)}\left|\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\chi(n_2)\right|^2\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ (\mathrm{mod}\ D)}\left|\sum_{W<n_3\leqslant W+W'}\chi(n_3)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Применив неравенство Коши, получим оценки:

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ (\mathrm{mod}\ D)}\left|\sum_{N_2<n_2\leqslant 2N_2}\chi(n_2)\right|^2\ll\frac{N_2^2}{D}+N_2\ ;$$

$$\frac{1}{\varphi(D)}\sum_{\chi\ (\mathrm{mod}\ D)}\left|\sum_{W<n_3\leqslant W+W'}\chi(n_3)\right|^2\ll\frac{W'^2}{D}+W'.$$

Тогда

$$S\ll X^{4\delta}\max_{\chi\neq\chi_0}\left\{\left|\sum_{H<n_1\leqslant H+H'}\chi(n_1)\right|\right\}\left(\frac{N_2}{\sqrt{D}}+\sqrt{N_2}\right)\left(\frac{W'}{\sqrt{D}}+\sqrt{W'}\right)\ll$$

$$\ll\sqrt{D}X^{5\delta}\left(\frac{N_2W'}{D}+\frac{N_2\sqrt{W'}}{\sqrt{D}}+\sqrt{N_2W'}\right).$$

Учитывая, что $N_1\geqslant X^{1/3}$, $N_2W'\leqslant X^{2/3}$ и сравнивая каждое слагаемое с величиной $\dfrac{X^{1-\delta}}{D}$, получаем результат: $D\leqslant X^{\frac{4}{9}-\varepsilon_2}$, где $\varepsilon_2=5\delta$. ■

Литература

1. Лаврик А.Ф. Функциональное уравнение для L-функций Дирихле и задача делителей в арифметических прогрессиях // Изв. АН СССР, Серия математическая. – 1966. – 30. – С.433-448.

2. Iwaniec H., Kowalsky E. Analytic number theory / Colloquium Publications, V.53 / American Mathematical Society, 2004.

3. Friedlander J., Iwaniec H. Incomplete Kloosterman sums and divisor problem // Ann. Math. – 1985. – 121. – P.319-350.

4. Карацуба А.А. Распределение произведений сдвинутых простых чисел в арифметических прогрессиях // Докл. АН СССР, – 1970. – 192;4. – С.724-727.

5. Петечук М. М. Сумма значений функции делителей в арифметических прогрессиях с разностью, равной степени простого нечетного числа // Изв. АН СССР, Серия математическая. – 1979. – 43;4. – С.892-908.

6. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел / А.А. Карацуба. – 2-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.

ON SUMMATION OF DIVISOR FUNCTION VALUES IN ARITHMETIC PROGRESSION

M.V. Shevtsova

Belgorod State University,
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: shevtsova@bsu.edu.ru

Abstract. The asymptotic formula of value sums of functions $\tau(n)$ and $\tau_3(n)$ on numbers lying in arithmetic progression is solved.

Key words: plan of ternary additive problem solution, Vinogradov-Poya estimate.

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК УДК 517.925

СИММЕТРИЧНОСТЬ СПЕКТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Ю.П. Вирченко, А.В. Субботин

Белгородский государственный университет,
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Аннотация. Рассматриваются линейные гамильтоновы системы с произвольным числом степеней свободы. Доказывается, что спектр генератора каждой такой системы расположен центрально симметричным образом относительно нуля в комплексной плоскости.

Ключевые слова: спектр, линейные гамильтоновы системы, центральная симметрия.

Будем рассматривать линейные гамильтоновы системы с $n \in \mathbb{N}$ степенями свободы. Это означает, что их фазовое пространство векторов $\langle \mathsf{P}, \mathsf{Q} \rangle$ представляет собой область в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то есть $\mathsf{P} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{Q} \in \mathbb{R}^n$, и гамильтониан H каждой из таких систем является квадратичной формой

$$H = \frac{1}{2}(\mathcal{A}\mathsf{P}, \mathsf{P}) + (\mathcal{B}\mathsf{P}, \mathsf{Q}) + \frac{1}{2}(\mathcal{C}\mathsf{Q}, \mathsf{Q})\,, \tag{1}$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – $n \times n$-матрицы такие, что $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}$, $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}$ и $\dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{C}) \leqslant 1$ (в противном случае, система имеет меньшее число степеней свободы).

Гамильтонова система, порождаемая гамильтонианом H, представляет собой линейную систему $2n$ обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для вектор-функций $\langle \mathsf{P}(t), \mathsf{Q}(t) \rangle$ от $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{\mathsf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathsf{Q}}\,, \qquad \dot{\mathsf{Q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathsf{P}} \tag{2}$$

(здесь каждое уравнение является n-мерным вектором в $\mathbb{R}^n$), и поэтому

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathsf{P}} \\ \dot{\mathsf{Q}} \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} \mathsf{P} \\ \mathsf{Q} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где матрица $\mathcal{G}$ – генератор группы сдвигов по t имеет вид

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} -\mathcal{B} & -\mathcal{C} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B}^T \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В настоящем сообщении мы устанавливаем замечательное свойство матриц такого вида, которое сформулировано в следующем утверждении.

Теорема. *Спектр матрицы $\mathcal{G}$ симметричен на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ относительно* $0 \in \mathbb{C}$.

□ Пусть $P(\lambda) = \det(\mathcal{G} - \lambda \cdot \mathbf{1})$ – полином, определяющий точки λ спектра матрицы $\mathcal{G}$, которые являются его нулями,

$$P(\lambda) = 0\,. \tag{5}$$

В силу совпадения детерминантов у взаимно транспонированных матриц, спектральное уравнение (5) эквивалентно следующему

$$\det(\mathcal{G}^T - \lambda \cdot \mathbf{1}) = 0\,, \tag{6}$$

где

$$\mathcal{G}^T = \begin{pmatrix} -\mathcal{B}^T & \mathcal{A} \\ -\mathcal{C} & \mathcal{B} \end{pmatrix}.$$

Пусть $2n \times 2n$-матрица $\mathcal{U}$ имеет блочную структуру

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{I} \\ \mathcal{I} & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{I}$ – $n \times n$-матрица. Она обладает свойствами $\mathcal{U}^T = -\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^2 = -\mathbf{1}$. Кроме того, для любой $2n \times 2n$-матрицы

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{11} & \mathcal{V}_{12} \\ \mathcal{V}_{21} & \mathcal{V}_{22} \end{pmatrix},$$

состоящей из блоков – $n \times n$-матриц $\mathcal{V}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, выполняется

$$\mathcal{U}\mathcal{V}\mathcal{U} = \begin{pmatrix} -\mathcal{V}_{22} & \mathcal{V}_{21} \\ \mathcal{V}_{12} & -\mathcal{V}_{11} \end{pmatrix}.$$

Тогда, ввиду инвариантности значения детерминанта относительно циклической перестановки сомножителей под знаком функционала $\det(\cdot)$ и чётности размерности матрицы $\mathcal{G}^T$, имеем

$$\det(\mathcal{G}^T - \lambda \cdot \mathbf{1}) = \det \mathcal{U}^2(\mathcal{G}^T - \lambda \cdot \mathbf{1}) = \det \mathcal{U}(\mathcal{G}^T - \lambda \cdot \mathbf{1})\mathcal{U} =$$

$$= \det(\mathcal{U}\mathcal{G}^T\mathcal{U} + \lambda \cdot \mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} -\mathcal{B} + \lambda \cdot \mathbf{1} & -\mathcal{C} \\ -\mathcal{A} & \mathcal{B}^T + \lambda \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} = P(-\lambda)\,.$$

Отсюда следует, что каждое решение уравнения (5) является решением уравнения $P(-\lambda) = 0$. ■

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966.

SPECTRUM SYMMETRY OF LINEAR HAMILTONIAN SYSTEMS

Yu.P. Virchenko, A.V. Subbotin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:virch@bsu.edu.ru

Abstract. Linear hamiltonian systems with arbitrary number of freedom degree are studied. It is proved that the generator spectrum of each such a system is situated by symmetrical way relative to zero on complex plane.

Key words: spectrum, linear hamiltonian system, central symmetry.

УДК 621.794.61:616-77

СТРУКТУРНО-ФАЗОВЫЕ СОСТОЯНИЯ МИКРОДУГОВЫХ БИОАКТИВНЫХ ПОКРЫТИЙ НА НАНОСТРУКТУРИРОВАННОМ ТИТАНЕ [10]

Г.В. Храмов, М.А. Лазебная, Ю.Р. Колобов, С.С. Манохин

Белгородский государственный университет,
Научно-образовательный и инновационный центр
«Наноструктурные материалы и нанотехнологии»,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail:khramov@bsu.edu.ru

Аннотация. Исследованы кальций-фосфатные покрытия медицинского назначения, сформированные методом микродугового оксидирования (МДО) на титановом сплаве ВТ1-0 в наноструктурированном состоянии. Современными аналитическими методами растровой и просвечивающей электронной микроскопии (РЭМ, ПЭМ) выявлены закономерности распределения концентрации химических элементов в поверхностном и основном объеме покрытия. Определены структурные и фазовые особенности наноразмерных кристаллических фаз, содержащихся в аморфной матрице покрытия.

Ключевые слова: кальций-фосфатное покрытие, наноструктурированный титан, микродуговое оксидирование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что свойства поверхности медицинского имплантата играют определяющую роль на его функционирование в живом организме. Ранее показано, что метод микродугового оксидирования (МДО) позволяет получать на титановых сплавах покрытия с хорошими показателями биосовместимости [1]. Метод МДО заключается в электрохимическом формировании на поверхности изделия защитного пористого слоя, состоящего из оксидов элементов металлической подложки. Важно, что при этом не происходит значительного нагрева образца и, как следствие, проявления рекристаллизационных процессов, приводящих к разупрочнению приповерхностных слоев [2,3].

В последние десятилетия много внимания уделяется исследованиям нелегированного титана (сплав ВТ1-0) в субмикрокристаллическом (СМК) и наноструктурированном (НС) состояниях [3,4]. Такой материал не содержит токсичных легирующих элементов, а по комплексу механических свойств не уступает легированным титановым сплавам. Представляется актуальным для широкого использования рассматриваемых сплавов в медицине проведение исследований физико-химических свойств покрытий для прогнозирования и управления поведением имплантатов с покрытиями в живом организме. Такие свойства в значительной степени связаны со структурно-фазовым состоянием и распространением химических элементов в объеме покрытий. Исследование указанных особенностей и является целью настоящей работы.

[10]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"на 2009 - 2013 годы, ГК № 14.740.11.0022, от 01 сентября 2010 г., ГК 14.740.12.0862

2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Образцы материала для обработки МДО из титана марки ВТ1-0 в наностуктурированном состоянии были изготовлены из партии коммерческого титанового полуфабриката, полученного на базе технологического участка Центра «Наноструктурные материалы и нанотехнологии» НИУ «БелГУ» [5]. Из титановой фольги толщиной 0,7 мм были изготовлены диски диаметром 3мм. В центральной части одной из стороны таблеток алмазным кругом была сформирована ямка, глубиной 0,4 мм, радиусом кривизны около 4 мм. Титановые образцы проходили шлифовку на абразивной шкурке Р320 и Р600, отмывку с применением ультразвуковой ванны в моющем растворе Вега-Р (ТУ 2499-009-50973417-00) при 60° С и последующую 3-х кратную отмывку в дистиллированной воде при 60° С.

Модификация поверхности проводилась на установке «МДО-20» (изготовитель – «МАТИ» - РГТУ им. К.Э. Циолковского) при следующих условиях. Состав электролита: 2 г/л КОН, 1 г/л NaOH, 5 г/л Na_2HPO_4, 5 г/л $nNa_2O{\cdot}mSiO_2$ (М=3,2), 8 г/л Na_2SiO_3, 1,5 г/л нанокристаллического гидроксиапатита; средняя плотность синусоидального тока частотой 50Гц – 0,1А/см^2; время обработки – 30 минут.

После оксидирования образцы трижды отмывались в ультразвуковой ванне с дистиллированной водой при 80° С в течение 1 минуты. Для исследования методами просвечивающей электронной микроскопии, диски с покрытием утонялись со стороны, не имеющей ямки, до появления отверстия в покрытии последовательно на абразивной шкурке Р600, Р1000 и с помощью алмазной пасты 1 мкм на бумаге. Исследования проводили на краевых участках поверхности покрытия, являющихся, по всей видимости, тонкими сколами хрупкого материала покрытия.

Исследования методами сканирующей электронной микроскопии проводились на микроскопе Quanta 600 FEG с приставкой для энергодисперсионного анализа (ЭДС) Genesis APEX 2 EDS Apollo X SDD. Исследования покрытия методами ПЭМ проводились на микроскопе Tecnai G2 20F S-TWIN с полевой эмиссией.

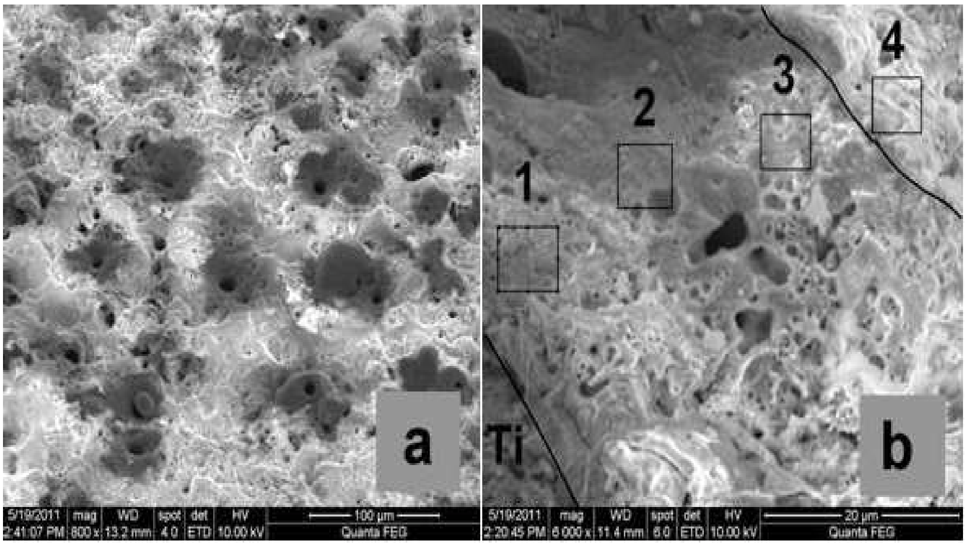

Рис. 1: Морфология поверхности МДО покрытия (РЭМ) (a) и участок скола МДО покрытия от подложки до поверхности, с обозначением мест снятия спектра (b).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Внешний вид поверхности покрытия и участка скола покрытия, исследованные в растровом электронном микроскопе (РЭМ), представлены на рис. 1.

Для выявления распределения элементного состава по сечению покрытия были получены энергодисперсионные спектры (ЭДС) последовательно в нескольких областях сечения и на поверхности. Как видно из рис. 1 (b), зоны 1 – 3 приходятся на внутреннюю часть покрытия, удаляясь от титановой подложки, зона 4 находится на внешней поверхности. Результаты элементного анализа по зонам приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Результаты элементного анализа различных зон поперечного сечения покрытия (ат.%).

	C	O	Na	Si	P	K	Ca	Ti
1	**3.0**	65.7	0.4	11.1	3.3	0.1	0.7	15.7
2	**3.1**	65.2	0.1	14.0	2.4	0.1	0.5	14.6
3	**2.9**	65.3	0.1	13.6	2.9	0.1	0.5	14.6
4	**7.4**	58.9	1.8	11.7	4.1	0.4	7.9	7.8

Из приведенной таблицы результатов элементного анализа видно, что слои покрытия, удаленные от поверхности обеднены кальцием. Содержание фосфора в них также меньше по сравнению с приповерхностными слоями, примерно, на 30. Содержание титана в этих слоях выше, чем непосредственно на поверхности. Таким образом, основными элементами, составляющими внутренний строительный материал покрытия, являются титан, кремний, кислород и, в небольшой степени, фосфор. Практически весь кальций сосредоточен в поверхностном слое.

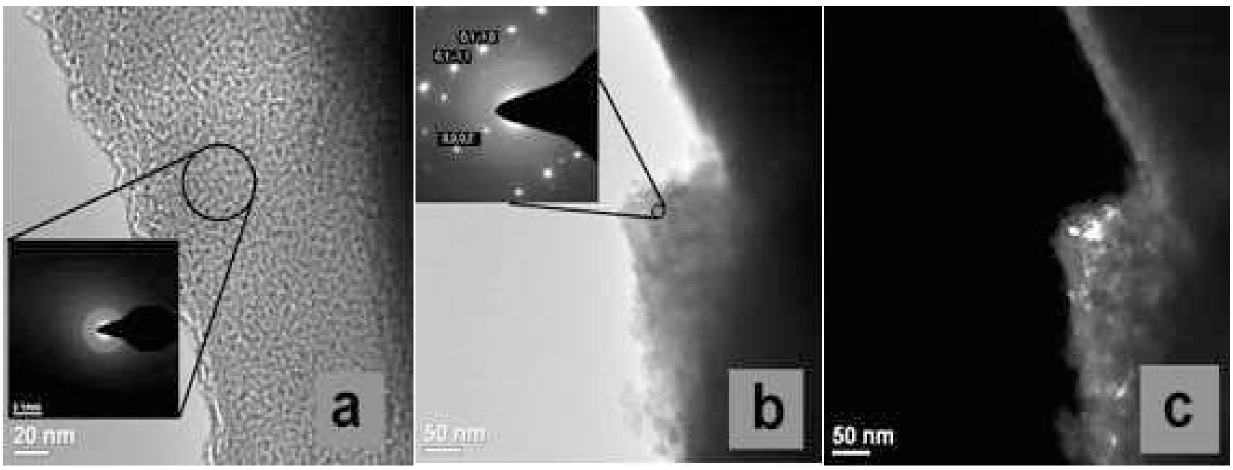

Рис. 2: Изображения покрытия, содержащего фрагмент области с аморфной структурой вещества (a); включения кристаллического титана в светлом поле с микродифракцией, с площади 0,03 мкм^2 (b); темнопольная картина этого же участка в рефлексе $[01\bar{1}0]$ (c). Ось зоны $[2\bar{1}\bar{1}0]$. ПЭМ.

Исследование микроструктуры приповерхностных слоев покрытия с помощью ПЭМ показало присутствие в материале покрытия наноразмерных кристаллитов и аморфного вещества (рис. 2). Образованию аморфной структуры способствует большое содержание кремния в составе покрытия, расплавы оксидов и других соединений которого легко приобретают стекловидную структуру (рис. 2, a). Наличие в покрытии включений титана является, по-видимому, следствием испарения и капельного распыления материала подложки во время мощных микродуговых разрядов на стадии формирования более толстого покрытия (рис. 2, b и c). При скоростном «запечатывании» таких включений в стеклофазу, титан может сохраняться в неокисленном состоянии. Кроме этого, дифракционным анализом ПЭМ в образцах с покрытием идентифицировано наличие следующих кристаллических фаз: TiO_2, анатаз, тетрагональная к.р., a=3,785, c=9,514; TiO_2, рутил, тетрагональная к.р., a=4,593, c=2,959; CaO, лайм, кубическая к.р., a=4,811; $Ca_3(PO_4)_2$, фосфат кальция, ромбоэдрическая к.р., a=5,248, c=18,691; $Ca_5(PO_4)_3OH$, гидроксиапатит, гексагональная к.р., a=9,418, c=6,884; $Ca_2Ti_5O_12$, кубическая к.р., a=8,62; $Ca_2Ti_2O_6$ кубическая к.р., a=9,953.

На микродифракционных картинах присутствуют преимущественно кольцевые распределения рефлексов, что свидетельствует о наличии в микроструктуре приповерхностных слоев покрытия кристаллитов наноразмерных фаз. Типичный пример электронограммы с кольцевым распределением рефлексов оксида кальция (CaO) представлен на рис. 3. Фаза оксида кальция может существовать, если находится в изолированном от водной среды состоянии, будучи защищенной другими фазами.

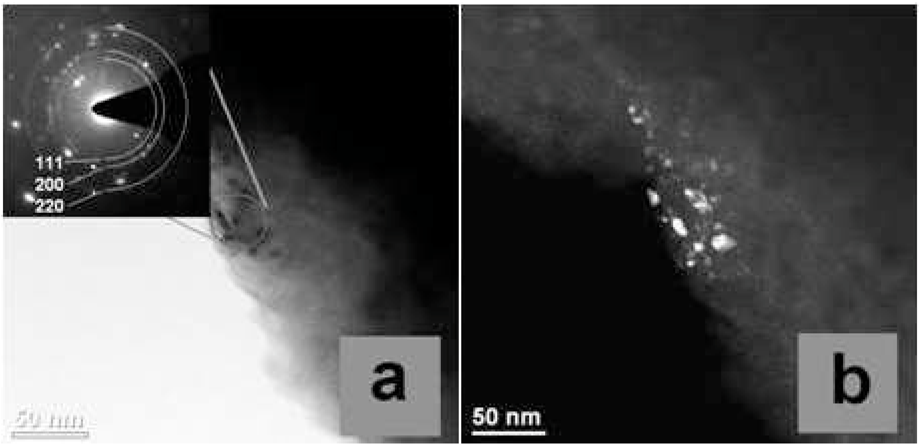

Рис. 3: Изображения участка покрытия с кристаллическим оксидом кальция: a) в светлом поле с микродифракцией, с площади 0,03 мкм^2; b) темное поле в рефлексах (111)ГЦК CaO фазы. ПЭМ.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обнаружена существенная разница между концентрацией кальция в поверхностном слое и основном объеме покрытия, заключающаяся в смещении основного содержания кальция к поверхности покрытия. Повышенное количество кальция на поверхности способствует приближению состава контактного слоя покрытия к минеральному составу костной ткани, в то время как его наличие в объеме покрытия не имело бы положительного эффекта. Структурно-фазовый анализ методом ПЭМ приповерхностного слоя выявил наличие наноразмерных кристаллических включений фаз оксидов титана и кальция, фосфатов кальция и металлического титана, содержащихся в аморфной матрице. Нанодисперсное состояние присутствующих в поверхности покрытия фаз должно активизировать биологические и химические процессы на поверхности. Обнаруженное сочетание распределения элементного состава по толщине покрытия и структурно-фазового состояния поверхностного слоя должно оказывать благоприятное воздействие на биологические процессы в зоне контакта имплантата и живых тканей организма.

Литература

1. Колобов Ю.Р., Дручинина О.А., Иванов М.Б., Сирота В.В., Лазебная М.А., Храмов Г.В., Трусова Я.В., Сергеева Н.С., Свиридова И.К. Формирование пористых комбинированных биоактивных покрытий на титановых сплавах ВТ6 и ВТ16 методом микродугового оксидирования // Нано- и микросистемная техника. -– 2009. -– 2. -– С.48-53.

2. Ракоч А.Г., Хохлов В.В., Баутин В.А., Лебедева Н.А., Магурова Ю.В., Бардин И.В. Модельные представления о механизме микродугового оксидирования металлических материалов и управление этим процессом // Защита металлов. -– 2006. -– 42;2. -– С.173-184.

3. Колобов Ю.Р. Технологии формирования структуры и свойств титановых сплавов для медицинских имплантатов с биоактивными покрытиями // Российские нанотехнологии. -– 2009. -– 4;11-12. -– С.69-81.

4. Колобов Ю.Р., Валиев Р.З., Грабовецкая Г.П. и др. Зернограничная диффузия и свойства наноструктурных материалов / Ю.Р Колобов. -– Новосибирск: Наука, 2001. — 232 с.

5. Иванов М.Б., Колобов Ю.Р., Голосов Е.В., Кузьменко И.Н., Вейнов В.П., Нечаенко Д.А., Кунгурцев Е.С. Механические свойства наноструктурного титана серийного производства // Российские нанотехнологии. -– 2011. -– 6;5-6. -– С.72-78.

STRUCTURAL-PHASE STATES OF BIOACTIVE MICROARC COATINGS ON NANOSTRUCTURED TITANIUM

G.V. Khramov, M.A. Lazebnaya, Yu.R. Kolobov, S.S. Manohin

Belgorod State University,
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail:khramov@bsu.edu.ru

Abstract. Calcium-phosphate coatings of medical purpose formed by micro-arc oxidation (MAO) in the titanium alloy VT1-0 in the nanostructured state are investigated. Regularities of concentration distribution of chemical elements in the surface and the bulk of the coating are detected using modern analytical methods scanning and transmission electron microscopy (SEM, TEM). Structural and phase characteristics of nanoscale crystalline phases contained in the amorphous matrix coating are identified.

Key words: calcium-phosphate coating, nanostructured titanium, microarc oxidation.

УДК 537.533.7

КОГЕРЕНТНОЕ ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В КРИСТАЛЛАХ ПРИ СВЕРХВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ ЭЛЕКТРОНОВ

В.В. Сыщенко, А.И. Тарновский

Белгородский государственный университет,
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

Аннотация. Рассмотрен процесс когерентного излучения в кристалле для электронов ультравысокой энергии (порядка 100 ГэВ) в случае, когда частица движется одновременно под малым углом ψ к одной из кристаллографических осей и под малым углом θ к одной из кристаллографических плоскостей. Показано, что наряду с обычными когерентными максимумами, в спектре возникает новый максимум высокой интенсивности в области малых частот, обусловленный вкладом плоскостей высокого порядка.

Ключевые слова: тормозное излучение, электрон, когерентный, кристалл.

Введение. При взаимодействии частиц высоких энергий с веществом процесс тормозного излучения разыгрывается в большой пространственной области вдоль импульса первичной частицы, называемой длиной когерентности [1, 2], которая быстро растет с ростом энергии частицы. Если в пределах такой области частица взаимодействует с большим числом атомов, то становятся существенными корреляции между последовательными столкновениями частицы с атомами, что может привести к появлению различных когерентных и интерференционных эффектов в излучении [1, 2]. В связи с этим, особый интерес представляет случай взаимодействия частиц с совокупностью атомов, образующих кристаллическую решетку.

Несмотря на то, что когерентное тормозное излучение (КТИ) в кристаллах уже в течение нескольких десятилетий используется для получения монохроматических поляризованных пучков фотонов высоких энергий для исследований в различных областях физики, некоторые из предсказанных явлений (такие, как влияние кристаллографических плоскостей высших порядков при сверхвысоких энергиях электронов) до сих пор не исследованы экспериментально.

Структура спектра КТИ. Рассмотрим случай, когда электрон падает на кристалл под малым углом ψ к одной из кристаллографических осей (оси z), причем проекция вектора импульса частицы p на плоскость (x, y), ортогональная оси z, образует угол α с кристаллографической плоскостью (y, z), плотно упакованной атомами. В этом случае сечение КТИ в рамках борновского приближения квантовой электродинамики будет определяться формулой [2]:

$$d\sigma_{coh} = \frac{2e^4\delta}{m^2 a_x a_y a_z}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\frac{d\omega}{\omega}\sum_g \frac{g_\perp^2}{g_\parallel^2}\left[1+\frac{\omega^2}{2\varepsilon\varepsilon'}-2\frac{\delta}{g_\parallel}\left(1-\frac{\delta}{g_\parallel}\right)\right]|u_g|^2\, e^{-g^2\overline{u^2}}, \tag{1}$$

$$g_\parallel \geq \delta,$$

где ε и ε' – энергия начального и конечного электронов, ω – частота излученного фотона, $g_\parallel = g_z + \psi(g_x \sin\alpha + g_y \cos\alpha)$, $g_\perp = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$ – параллельная и ортогональная импульсу начальной частицы компоненты вектора обратной решетки g, u_g – фурье-образ потенциала поля отдельного атома, а $\delta = \omega m^2/(2\varepsilon\varepsilon')$; мы используем систему единиц $\hbar = c = 1$.

При исследовании спектра когерентного излучения обычно рассматривают ситуации, когда частицы движутся в кристалле либо вдоль одной из кристаллографических плоскостей ($\alpha = 0$) и под малым углом ψ к одной из кристаллографических осей (оси z), либо под малым углом к одной из кристаллографических плоскостей ($\psi \sim 1$, $\alpha \ll 1$). Наличие резких максимумов в спектре когерентного излучения в обоих случаях обусловлено интерференцией излучения, возникающего, в первом случае, при взаимодействии заряженной частицы с отдельными атомными цепочками кристаллографической плоскости, во втором – взаимодействием частицы с отдельными атомными плоскостями.

Ситуация, когда частица движется одновременно под малым углом к одной из кристаллографических осей ($\psi \ll 1$) и под малым углом к одной из кристаллографических плоскостей ($\alpha \ll 1$), вызывает особый интерес, так как в этом случае одновременно реализуются оба отмеченных выше интерференционных эффекта.

Как можно увидеть из (1), с увеличением энергии частиц положение максимумов в спектре КТИ быстро смещается в область высоких частот. Выше энергий порядка 100 ГэВ интерференционные максимумы переходят в область гамма-квантов с энергией, близкой к энергии излучающих частиц. При таких энергиях в спектре КТИ в области малых частот могут возникать дополнительные максимумы, обладающие интенсивностью, сравнимой по величине с интенсивностью обычных когерентных максимумов.

На рис. 1 показаны результаты вычисления спектра когерентного тормозного излучения электронов энергии 100 ГэВ, движущихся в кристалле кремния под углом $\psi = 0{,}002$ рад к оси $\langle 001 \rangle$ (ось z), по формуле (1) при различных значениях угла α между плоскостью (110) и проекцией импульса электрона на плоскость (001). Видно, что наряду с обычными когерентными максимумами, лежащими в области $\omega \geq 0,7\varepsilon$, в спектре возникает новый максимум с высокой интенсивностью излучения, который, при небольшом изменении угла α, смещается и исчезает, в то время как главный максимум когерентного излучения, находящийся в районе $\omega \approx 0,7\varepsilon$, практически не изменяется.

Главный максимум когерентного излучения (отмечен на рис. 1 стрелкой) вызван вкладом в сечение излучения вектора обратной решетки с компонентами $g_x = 2\pi/a_x$, $g_y = g_z = 0$, то есть интерференцией электромагнитных волн, испущенных при взаимодействии электрона с атомными плоскостями, параллельными плоскости (110). Появление максимума в области $\omega < 0,7\varepsilon$ связано со вкладом в сечение вектора g с компонентами $g_x = 10\pi/a_x$, $g_y = -2\pi/a_x$, $g_z = 0$ (в кристалле кремния $a_x = a_y$), то есть вследствие интерференции электромагнитных волн, испущенных электроном при взаимодействии с плоскостями, параллельными плоскости (320). Следовательно, частица движется в кристалле под малыми углами одновременно к двум кристаллографическим плоскостям, что и приводит к появлению двух различных максимумов с высокой интенсивностью излучения. Необходимым условием появления такого дополнительного максимума является наличие корреляций между последовательными столкновениями частицы с атомными цепочками, образующими плоскость (320). Можно показать, что в рассматриваемой области углов ψ ($\psi_c \ll \psi \ll 1$, где ψ_c – критический угол аксиального каналирования [2]) при $b \sim R$, где R – радиус экранировки атомного потенциала (радиус Томаса-Ферми), это условие принимает вид:

$$\frac{\psi_c^2}{\alpha\psi^2} \ll \frac{R}{a}\,. \tag{2}$$

С уменьшением энергии частиц это неравенство быстро нарушается, поэтому условия, при которых можно наблюдать новый максимум в спектре когерентного излучения, выполняются

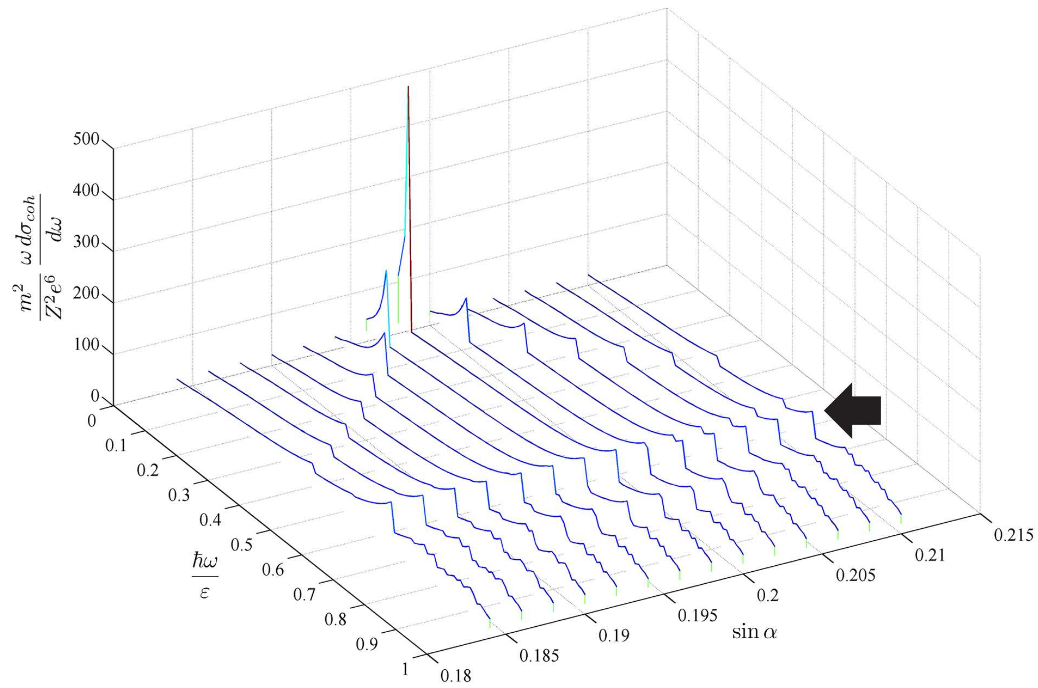

Рис. 1: Спектр когерентного тормозного излучения электронов энергии 100 ГэВ в кристалле кремния при угле падения $\psi = 0{,}002$ рад на ось $\langle 001\rangle$ и различных значениях угла α между плоскостью (110) и проекцией импульса электрона на плоскость (001).

только при достаточно высоких энергиях.

Другим условием наблюдения предсказанного максимума является достаточно низкая расходимость пучка электронов. Действительно, поскольку положение дополнительного максимума в спектре излучения более чувствительно к ориентации кристалла, чем положение основного максимума, то большая расходимость пучка приведет к «размазыванию» положения дополнительного максимума при одновременном значительном увеличении относительной высоты основного максимума в интенсивности регистрируемого излучения. В соответствии с рис. 1, расходимость пучка электронов должна составлять менее чем $\Delta\theta \sim \psi\,\Delta\alpha \sim 10^{-5}$ рад.

Заключение. Анализ условий возникновения дополнительного максимума в спектре когерентного излучения показывает, что он может быть обнаружен экспериментально на существующих пучках электронов, получаемых, например, на ускорителях CERN. Следует отметить, что систематические исследования когерентного тормозного излучения частиц сверхвысоких энергий в кристаллах до сих пор не проводились. Однако, интерес к данному кругу явлений в последние годы неуклонно возрастает. В частности, соответствующие эксперименты включены в программу исследований коллаборации CERN NA63 на ближайшие годы [3].

Работа выполнена при частичной поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», ГК 16.740.11.0147 от 02.09.2010 и программы внутренних грантов НИУ «БелГУ».

Литература

1. Тер-Микаелян М.Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях / М. Л. Тер- Микаелян. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1969. — 457 с.

2. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе / А.И. Ахиезер. – М.: Наука, 1993. – 344 с.

3. Шульга Н.Ф., Трутень В.И. Когерентное тормозное излучение релятивистскими электронами в кристаллах при ультрабольших энергиях (предложения для ЦЕРН) // Тезисы докладов XLI международной конференции по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. – М.: Университетская книга, 2011. – С. 68.

COHERENT BREMSSTRAHLUNG IN CRYSTALS AT ULTRAHIGH ENERGIES OF ELECTRONS

V.V. Syshchenko, A.I. Tarnovsky

Belgorod State University,
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia

Abstract. The process of coherent radiation in a crystal for ultrahigh energy electrons (about 100 GeV) in the case where the particle is moving at the same time at a small angle ψ to one of the crystallographic axes and at a small angle θ to one of the crystallographic planes is considered. It is shown that in addition to usual coherent peaks in the spectrum, a new maximum of high intensity at low frequencies could arise due to the contribution of high-order crystallographic planes.

Key words: bremsstrahlung, electron, coherence, crystal.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Абаполова Е.А.	–	старший преподаватель Белгородского государственного университета
Айрапетян Г.М.	–	доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой Ереванского государственного университета, Армения
Алдашев С.А.	–	доктор физико-математических наук, профессор Института прикладной математики и информатики при АГУ им. К. Жубанова, Казахстан
Бабаян В.А.	–	аспирант Южного федерального университета
Барышева И.В.	–	старший преподаватель Липецкого государственного педагогического университета
Вирченко Ю.П.	–	доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой Белгородского государственного университета
Витохина Н.Н.	–	кандидат физико-математических наук, доцент Белгородского государственного университета
Глушак А.В.	–	доктор физико-математических наук, декан факультета математики и информационных технологий Белгородского государственного университета
Колобов Ю.Р.	–	доктор физико-математических наук, директор научно-образовательного и инновационного центра «Наноструктурные материалы и нанотехнологии» Белгородского государственного университета
Коробов В.И.	–	доктор физико-математических наук, профессор Белгородского государственного университета
Коротков А.Е.	–	аспирант Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского,

Лазебная М.А.	–	научный сотрудник научно-образовательного и инновационного центра «Наноструктурные материалы и нанотехнологии» Белгородского государственного университета
Ляхов Л.Н..		доктор физико-математических наук, профессор Воронежского государственного университета
Мазманишвили А.С.	–	доктор физико-математических наук, пофессор Сумского государственного университета, Украина
Манохин С.С.	–	научный сотрудник научно-образовательного и инновационного центра «Наноструктурные материалы и нанотехнологии» Белгородского государственного университета
Матвеева О.А.	–	магистрант Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского
Николаев В.Г.	–	ассистент Новгородского государственного университета
Покручин О.А.		аспирант Белгородского Государственного университета
Половинкин И.П.	–	кандидат физико-математических наук, доцент Воронежского государственного университета
Попова О.И.	–	старший преподаватель Воронежского государственного университета
Примак И.М.		аспирант Белгородского государственного университета
Прядиев В.Л.		кандидат физико-математических наук, провессор Белгородского государственного университета
Сеилханова Р.Б.	–	кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Института прикладной математики и информатики при АГУ им. К. Жубанова
Солдатов А.П.	–	доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа Белгородского государственного университета

Субботин А.В.	–	магистрант Белгородского государственного университета
Сыщенко В.В.	–	доктор физико-математических наук, профессор Белгородского государственного университета
Тарасова О.А.	–	аспирант Белгородского государственного университета
Тарновский А.И.	–	аспирант Белгородского государственного университета
Урбанович Т.М.	–	старший преподаватель Полоцкого государственного университета, Беларусь
Храмов Г.В.	–	инженер научно-образовательного и инновационного центра «Наноструктурные материалы и нанотехнологии» Белгородского государственного университета
Шевцова М.В.	–	аспирант Белгородского государственного университета

ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. Два выпуска журнала посвящены чисто математическим работам и два – работам по физике и прикладной математике.

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках, по различным разделам математики и физики. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора (ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором (ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчётом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором (ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков и(или) физиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчёт о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи (условий проведения эксперимента, если это экспериментальная работа по физике). В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором (ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлегией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в математических текстах должны быть чётко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата A4. Она должна быть написана шрифтом 12pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлегией журнала.

После подготовки одним из членов редколлегии заключения о соответствии рукописи нормам журнала «Научные ведомости» она рассматривается на общем собрании редколлегии. В отдельных случаях редколлегией может быть принято решение о более тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

В редакцию присылается следующая информация:

1) основная содержательная часть статьи, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.

2) номер УДК того научного направления, которому посвящена статья;

3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;

4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;

5) список ключевых слов (не более 10-12);

6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;

7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;

8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса предприятия и занимаемой должности. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;

9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

Порядок оформления этой информации в электронном файле указан в приложении в конце настоящих правил (см. п.5) требований к электронному набору).

В редакцию присылается электронный вариант рукописи. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). **Файлы, приготовленные в другом редакторе, рассматриваться редколлегией не будут**. При этом нужно также прислать файл с pdf-копией рукописи для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании.

Особое внимание должно быть уделено рисункам, если они имеются в рукописи. Они должны быть качественно оформлены и приготовлены в виде отдельных электронных файлов в формате «ps» (можно также присылать файлы рисунков в формате «ps», но при этом нужно проследить, чтобы они были приготовлены в «векторном формате», то есть так, чтобы их можно было транслировать в формат «ps»). Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам (см. п.7).

Внимание!

1. На представляемых в электронном формате рисунках не следует наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.

2. Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Обращаем внимание авторов на то, что список литературы должен быть оформлен строго в соответствии с существующим ГОСТом. При этом нужно обратить особое внимание на то, чтобы были указаны полные названия журнальных статей и статей в сборниках, на которые есть ссылки в тексте рукописи, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные. Каждая из монографий в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

Особые требования к электронному набору в редакторе LaTeX (LaTeX, AMS LaTeX) следующие:

1) нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды;

2) выключные формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабжённых штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста;

3) в случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложнения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения;

4) литературные источники в ссылках на основе команд cite (или непосредственно) в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.

5) ниже прилагается шаблон, согласно которому должен оформляться файл статьи. **Следование этому шаблону обязательно** для авторов обязательно.

Шаблон для приготовления файла с рукописью

```
\setcounter{figure}{0}
\setcounter{equation}{0}
УДК XXX
\vskip 0.3cm

\begin{center}
{\bf НАЗВАНИЕ СТАТЬИ}
\medskip
{\bf И.О. Автор1, И.О. Автор2, ... }
```

```
\medskip
{\small {\sf  Учреждение,\\
ул. Название улицы (пр. Название проспекта, пл. Название площади и т.д.),
Номер дома, Город, Индекс, Страна, e-mail: $\underline{\mbox{имя@адрес}}$}}
\end{center}

{\small {\bf Аннотация.} Текст аннотации.
\medskip
{\bf Ключевые слова:} слово1, слово2, ...\ \ \ .}
\vskip 1 cm

Текст статьи
\vskip 1 cm

\begin{center}
{\bf Литература}
\end{center}

\begin{enumerate}
\bibitem{1} Источник 1
\bibitem{2} Источник 2
...
\end{enumerate}
\vskip 1 cm

\begin{center}
{\bf TITLE}
\medskip
{\bf  N.N. Author1, N.N. Author2, ...}
\medskip
{\small  {\sf Enterprize,\\
Street St. (Avenue Av., Square Sq. and so on), Number, City, Index, Country,
e-mail: $\underline{\mbox{name@address}}$}}
\end{center}

{\small {\bf Abstract.} Text of abstract.
{\bf Key words:} word1, word2, ...  .}
\newpage
Автор1 -- учёная степень, должность на предприятии, страна
Автор2 -- учёная степень, должность на предприятии, страна
...
```